

Man n.
25. 100
Kniess

Lehrbuch der Arithmetik

I.

Math. P. 257 ~~fdg~~

kniss

Lehrbuch der Arithmetik

für

Real- und Lateinschulen

von

K. Kniess

Kgl. Gymnasialprofessor der Mathematik und Physik.

I. Teil.

Sechste unveränderte Auflage.

München 1898.

Verlag von Max Kellner's h. b. Hofbuch- u. Kunsthandlung.

Ministeriell zur Einführung genehmigt.



Abdruck des Vorwortes zur vierten Auflage.

Immer noch liest und hört man, und zwar auch von massgebender Seite, die Ansicht, dass der Rechenunterricht sich lediglich auf die Aneignung einer gewissen Gewandtheit im Zifferrechnen und der („mechanischen“) Lösung von einfachen Aufgaben aus dem Bereiche des bürgerlichen Lebens zu beschränken habe, und dass ein vorbereitender Unterricht für die allgemeine Arithmetik zu schwer und auch überflüssig sei.

Ich habe nun die gegenteilige Ansicht wiederholt schon in den früheren Auflagen dieses Buches vertreten und bin auch jetzt überzeugt, dass neben der Erzielung einer gewissen mechanischen Fertigkeit im Rechnen auch ein Verständnis des Zusammenhanges der einzelnen Rechnungsoperationen bei den Schülern geweckt werden müsse, dass die Lösung von Aufgaben nicht bloss schematisch, sondern dem Inhalte nach zu erfolgen habe, dass endlich die wichtigsten Gesetze der allgemeinen Arithmetik, wenn auch zunächst ohne strenge Beweise, doch in völlig korrekter Form mit Hilfe bestimmter Zahlen den Schülern zur Kenntniss gebracht werden sollen.

Dass dies möglich ist und den nachfolgenden Unterricht in der allgemeinen Arithmetik ganz hervorragend erleichtert, habe ich selbst in langjähriger Praxis erprobt.

Die Vorbereitung für den Unterricht in der allgemeinen Arithmetik erfordert aber, dass bereits auch in der besonderen Arithmetik die Rechengesetze in gleicher Form aufgestellt werden wie dort, ein Umstand, der bisher so ziemlich in allen Rechenbüchern und auch von mir gewohnheitsmässig nicht strenge beachtet wurde. Mehr und mehr jedoch gewann ich die Überzeugung, dass es besser sei, gleich von vorneherein die Definitionen der Operationen und die Form der Sätze so zu geben, wie es die allgemeine Arithmetik später verlangt,

zumal sich dadurch für die Schüler absolut keine grösseren Schwierigkeiten in der Auffassung und dem Verständnis ergeben.

Diese Überzeugung nun veranlasste eine teilweise Umarbeitung der vorhergehenden Auflage des Buches, insbesondere der §§ 7 bis 17, eine Umarbeitung, die sich jedoch nur auf die Form, nicht auch auf den Inhalt bezieht. Gleichzeitig nahm ich Stellung zu der Frage über das Schreiben des Multiplikators vor oder hinter das Operationszeichen, nachdem alle diesbezüglichen Anfragen und Diskussionen zu keinem bestimmten Resultate führen wollen.

Korrekt ist es doch nur, den Multiplikator nach dem Zeichen zu schreiben und das Zeichen auszusprechen durch „multipliziert mit“. Will man gleichwohl das Wörtchen „mal“ beibehalten, so spreche man eben das Produkt $5 \cdot 3$ aus: „3 mal 5“. Will nur der Lehrer das ernstlich durchführen, so wird er die Schüler leicht daran gewöhnen, und diese neue Form wird den letzteren sehr bald ebenso geläufig werden, als es bisher die alte wurde. Die kleine Unbequemlichkeit, welche das längere „multipliziert mit“ enthält, wird durch das bessere Verständnis der Operation gewiss aufgewogen, und die Zunge werden sich die Schüler dahei kaum „auskegeln“.

Damit sei diese neue Auflage den Herren Fachkollegen zu wohlwollender Beurteilung empfohlen. Besonderen Wünschen werde ich gern, wenn irgend möglich, Rechnung tragen.

Übungsstoff findet sich reichlich in der „Aufgabensammlung für das Rechnen mit bestimmten Zahlen von Kniess und Bachmann“. Eine besondere kürzere „Ausgabe der Aufgabensammlung für Lateinschulen“ sei auch solchen Anstalten empfohlen, welchen für den Rechenunterricht weniger Zeit zur Verfügung steht, als dies an den Realschulen der Fall ist.

Ans bach, im September 1892.

Der Verfasser.

Inhaltsverzeichnis.

Vorwort	Seite III
-------------------	--------------

Einleitung.

§ 1.	Die Zahl. Zahlenreihe	1
§ 2.	Numerieren der bestimmten Zahlen. Das Zehnersystem	2
§ 3.	Zahlzeichen der Griechen und Römer	4
§ 4.	Bezeichnung der unbestimmten Zahlen	4
§ 5.	Das Rechnen. Operations- und Beziehungszeichen	4

I. Unbenannte Zahlen.

§ 6.	Rechnungsarten	5 ✓
§ 7.	Addition	5 ✓
§ 8.	Subtraktion	6 ✓
§ 9.	Multiplikation	9 ✓
§ 10.	Division	13 ✓
§ 11.	Zahlenausdrücke	18 ✓
§ 12.	Zahlenausdrücke der ersten Art	19 ✓
§ 13.	Anwendung von Zahlenausdrücken der ersten Art	21 ✓
§ 14.	Zahlenausdrücke der zweiten Art	22 ✓
§ 15.	Anwendung von Zahlenausdrücken der zweiten Art. (Rechnungsabkürzungen)	23 ✓
§ 16.	Zahlenausdrücke gemischter Art	26 ✓
§ 17.	Anwendung von Zahlenausdrücken gemischter Art	27 ✓
§ 18.	Rechnungsabkürzungen	29 ✓
§ 19.	Potenz	31 ✓

II. Benannte Zahlen.

§ 20.	Erklärungen	32 ✓
§ 21.	Begriff der Reduktion	33 ✓
§ 22.	Reduktionszahlen	33 ✓
§ 23.	Das metrische Mass- und Gewichtssystem	37
§ 24.	Ausführung der Reduktion	39

Die vier Grundrechnungsarten mit benannten Zahlen.

	Seite
§ 25. Addition und Subtraktion	41
§ 26. Multiplikation	43
§ 27. Division. Durchschnittsberechnungen	44

III. Teilbarkeit der Zahlen.

§ 28. Erklärungen	47
§ 29. Allgemeine Regeln über die Teilbarkeit	47
§ 30. Kennzeichen der Teilbarkeit. (Neunerprobe)	48
§ 31. Zerlegung in Primfaktoren	51
§ 32. Der grösste gemeinschaftliche Teiler	52
§ 33. Das kleinste gemeinschaftliche Vielfache	54

IV. Die gemeinen Brüche.

§ 34. Allgemeine Eigenschaften der Brüche	56
§ 35. Veränderung des Wertes und der Form der Brüche	59
§ 36. Erweitern und Vereinfachen der Brüche	60
§ 37. Vergleichung der Brüche in bezug auf ihre Grösse	61
§ 38. Addition und Zerlegung der Brüche	62
§ 39. Subtraktion der Brüche	63
§ 40. Multiplikation der Brüche mit ganzen Zahlen	64
§ 41. Division der Brüche durch ganze Zahlen	65
§ 42. Multiplikation mit Brüchen	66
§ 43. Division durch Brüche	68
§ 44. Zahlenausdrücke mit Brüchen	69

V. Dezimalbrüche.

§ 45. Erklärung und Numerieren der Dezimalbrüche	70
§ 46. Addition und Subtraktion der Dezimalbrüche	72
§ 47. Multiplikation der Dezimalbrüche	73
§ 48. Division der Dezimalbrüche	74
§ 49. Verwandlung der gemeinen Brüche in Dezimalbrüche	76
§ 50. Verwandlung der Dezimalbrüche in gemeine Brüche	78

VI. Benannte Brüche.

§ 51. Reduktion und Anwendung von Zahlenausdrücken	79
§ 52. Einfache Massreduktionen, insbesondere Umwandlungen der alten Einheiten in die neuen	82

Einleitung.

§ 1.

Arithmetik ist die Lehre von den Zahlen und Zahlenverbindungen.

Unter einer Zahl versteht man sowohl die Einheit, als auch jede Menge von Einheiten.

Einheit heisst ein jedes einzelne von gleichartigen Dingen, von Dingen also, die in gewissen Merkmalen übereinstimmen.

Eine Zahl, welche nur eine Menge von Einheiten anzeigt, die Art derselben aber ganz unbestimmt lässt, nennt man eine abstrakte oder unbenannte Zahl. Die abstrakte Einheit heisst Eins.

Das Bilden der Zahlen aus der Eins durch fortgesetztes Hinzufügen der Eins nennt man **zählen**. Fügt man zu Eins noch Eins hinzu, so erhält man die Zahl zwei, durch neues Hinzufügen von Eins die Zahl drei u. s. f. Durch das Zählen erscheinen die Zahlen in einer bestimmten Reihenfolge, welche man die natürliche Zahlenreihe heisst, und welche von der Eins an ohne Ende fortgeht.

Ist die Art der Einheiten einer Zahl angegeben, ist also die Einheit der Zahl eine mit Namen bezeichnete Grösse, so heisst die Zahl eine benannte, und diese Einheit ist ihre Benennung.

Man unterscheidet ferner ganze Zahlen, wenn die Einheit, welche derselben zu grunde gelegt ist, eine ungeteilte Grösse ist, und gebrochene Zahlen oder Brüche, wenn diese Einheit irgend ein Teil einer Grösse ist.

Endlich sind die Zahlen bestimmte, wenn sie eine Stelle in der natürlichen Zahlenreihe einnehmen, oder aber unbestimmte oder allgemeine, wenn sie alle möglichen Zahlen der natürlichen Zahlenreihe bedeuten können.

§ 2.

Bestimmte Zahlen gibt es unendlich viele. Um dieselben auszudrücken, sind auch unendlich viele Wörter und Zeichen notwendig, die jedoch nach einem bestimmten Systeme hergestellt werden. Die Wörter nennt man Zahlwörter, die Zeichen heissen Ziffern.

Eine in Worten ausgesprochene Zahl mit Ziffern anschreiben, sowie eine mit Ziffern geschriebene Zahl ablesen, heisst **numerieren**.

Dem Systeme, nach welchem die bestimmten Zahlen durch Worte und Ziffern dargestellt werden, dient als Grundlage die Zahl zehn, weshalb dasselbe auch das **Zehnersystem** oder das **dekadische Zahlssystem** genannt wird.

Man bildet auf einander folgende Ordnungen in der Weise, dass jede Einheit einer folgenden Ordnung zehn Einheiten der vorhergehenden Ordnung enthält. Darnach zählt man von „eins“ beginnend bis „neun“, bezeichnet diese Zahlen als Einheiten erster Ordnung und nennt sie „Einer“, bezeichnet dann die nächsten zehn Einheiten als eine Einheit der zweiten Ordnung und nennt sie „Zehner“, vereinigt dann weiter zehn Einheiten der zweiten Ordnung zu einer Einheit der dritten Ordnung, den „Hundertern“, dann wieder zehn Hunderter zu einer Einheit der vierten Ordnung, den „Eintausendern“, u. s. f. Drei Ordnungen vereinigt man ferner zu einer Klasse, und zwei Klassen endlich zu einer Gruppe, so dass das ganze System sich, wie folgt, gestaltet:

(Von rechts nach links zu lesen.)

II.						I.						Gruppe.
IV.			III.			II.			I.			Klasse.
XII	XI	X	IX	VIII	VII	VI	V	IV	III	II	I	Ord- nung.
Hundert-	Zehn-	Ein-	Hundert-	Zehn-	Ein-	Hundert-	Zehn-	Ein-	Hunderter.	Zehner.	Einer.	
Tausend-						Tausender.						
Millioner.												

Als weitere Gruppen folgen dann die Billioner, Trillioner, Quatrillioner, u. s. f.

Zum Anschreiben der Zahlen bedient man sich gewöhnlich der arabischen Ziffern, nämlich:

eins,	zwei,	drei,	vier,	fünf,	sechs,	sieben,	acht,	neun,
1	2	3	4	5	6	7	8	9

wozu noch das Zeichen 0 (null) kommt, welches das Nichtvorhandensein einer Einheit bedeutet.

Um aber mit diesen neun Ziffern alle übrigen Zahlen schreiben zu können, versetzt man dieselben einfach um eine Stelle nach links, wodurch sie einen zehnmal grösseren Wert erhalten, also Zehner bedeuten; dann wieder eine Stelle nach links, um damit die Hunderter zu bezeichnen, u. s. f. Die leerbleibenden Stellen werden dabei, sofern sie nicht mit irgend einer anderen Ziffer ausgefüllt werden, durch das Zeichen 0 (Null) angedeutet.

Jede Ziffer hat demnach einen doppelten Wert, einmal nämlich ihren ursprünglichen, welcher die Menge der Einheiten ausdrückt, und Nominal- oder Nennwert heisst, sodann aber denjenigen, welcher ihr vermöge ihrer Stellung zukommt und deshalb Lokal- oder Stellenwert genannt wird. Nach diesem Stellenwert bezeichnet eine Ziffer Einheiten der ersten, zweiten, dritten u. s. w. Ordnung, je nachdem sie an der ersten, zweiten, dritten u. s. w. Stelle nach links steht, oder eine Ziffer erhält einen zehn-, hundert-, tausendmal u. s. w. grösseren Wert, wenn sie um eine, zwei, drei u. s. w. Stellen nach links versetzt wird. Die Ziffer 5 an der ersten Stelle bezeichnet 5 Einer, also fünf; an der zweiten Stelle dagegen 5 Zehner, also fünfzig (50), an der dritten Stelle 5 Hunderter, also fünf Hundert (500) u. s. f.

In der Zahl 50307012068409 bezeichnet die Ziffer 9 Einer, die Ziffer 4 Hunderter, 8 Eintausender, 6 Zehntausender, 2 Einmillioner, 1 Zehnmillioner u. s. w. Soll die Zahl ausgesprochen werden, so liest man, bei der höchsten Klasse beginnend, immer drei Ordnungen zusammen, lässt dann die Klassen- und dieser die Gruppenbenennung folgen. Der leichteren Übersicht wegen setzt man zuvor, um die einzelnen Gruppen zu unterscheiden, über der Zeile zuerst einen, dann zwei u. s. w. Punkte, oder man lässt nach jeder Gruppe einen kleinen Zwischenraum. Fehlende Stellen werden nicht ausgesprochen. Man schreibt also:

50307012068409 oder 50 307012 068409,

und liest: fünfzig **Billionen**, dreihundertsieben tausend zwölf **Millionen**, achtundsechzig Tausend vierhundert neun.

Soll eine ausgesprochene Zahl angeschrieben werden, so schreibe man die Zahl zuerst, nach welcher das erstemal Tausend, Million oder Billion u. s. w. gesprochen wurde, und beachte, dass nach Tausend noch eine Klasse, also drei Stellen, nach Million noch zwei Klassen, also sechs Stellen u. s. w. folgen, die, wenn nicht weitere Ziffern folgen, mit Nullen auszufüllen sind. Im übrigen stehen in jeder einzelnen Klasse immer die Hunderter an der dritten, die Zehner an der zweiten und die Einer an der ersten Stelle.

Die Zahl „drei Billionen siebentausend achtzig Millionen sechshundert vier Tausend fünfhundert“ wird demnach geschrieben:

3007080604500 oder 3 007080 604500.

§ 3.

Die Griechen bedienten sich ihrer Buchstaben als Zahlzeichen; ebenso gebrauchten auch die Römer einige Buchstaben ihres Alphabets als Zahlzeichen, nämlich:

I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
XX	XXX	XL	L	LX	XC	C	CD	D	CIO	oder M	
20	30	40	50	60	90	100	400	500		1000	

§ 4.

Die Bezeichnung der unbestimmten Zahlen geschieht durch Buchstaben; es kann also a oder n alle möglichen Zahlen der natürlichen Zahlenreihe bedeuten, mit der Einschränkung jedoch, dass der einmal in einer Aufgabe gewählte Buchstabe in dieser Aufgabe stets dieselbe bestimmte Zahl bedeutet, und dass in der nämlichen Aufgabe verschiedene Buchstaben stets verschiedene Zahlen bezeichnen.

§ 5.

Werden aus gegebenen Zahlen durch Veränderungen oder Operationen, die man mit ihnen vornimmt, indem man sie mit anderen gegebenen Zahlen verbindet, neue unbekannte Zahlen aufgesucht, so nennt man dieses Verfahren **rechnen**. Eine solche durch Ausführung von Rechnungsoperationen gefundene Zahl heisst sodann das Resultat der Rechnung, wenn die gegebenen Zahlen bestimmte sind. Bei unbestimmten Zahlen können die Operationen nicht wirklich ausgeführt, sondern nur durch Operationszeichen angedeutet werden.

Ausser den Operationszeichen, welche also die Art der auszuführenden Rechnung angeben, sind zu den Rechnungsoperationen noch besondere Beziehungszeichen erforderlich, nämlich das Zeichen der Gleichheit $=$, um anzuzeigen, dass zwei Grössen einander gleich sind, z. B. $5 = 5$, fünf ist gleich fünf; ferner die Zeichen der Ungleichheit, $>$ „grösser als“, und $<$ „kleiner als“, z. B. $9 > 5$, neun ist grösser als fünf; $3 < 7$, drei ist kleiner als sieben.

I. Unbenannte Zahlen.

Rechnungsarten.

§ 6.

Jede Zahl kann auf zweierlei Weise verändert werden, entweder durch Vermehrung oder durch Verminderung.

Die Vermehrung wird bewirkt durch Addition und Multiplikation (direkte Rechnungsarten), die Verminderung durch Subtraktion und Division (indirekte Rechnungsarten).

Man unterscheidet demnach vier Grundrechnungsarten oder Species, und teilt dieselben nach ihrer Zusammengehörigkeit in

1. Operationen der ersten Art: Addition und Multiplikation;
2. Operationen der zweiten Art: Subtraktion und Division.

Addition.

§ 7.

1. Zwei Zahlen **addieren** (zusammenzählen) heisst eine neue Zahl suchen, welche eben so viele Einheiten enthält, als die gegebenen Zahlen zusammen Einheiten enthalten.

Die Zahlen, welche addiert werden sollen, heissen **Summanden**, die gesuchte Zahl (das Resultat der Addition) heisst **Summe**. Das Zeichen der Addition ist ein stehendes Kreuz ($+$), ausgesprochen: plus (mehr); z. B.

$7 + 9 = 16$ (ausgesprochen: 7 plus 9 ist gleich 16).

$7 + 9$ stellt die Form der Addition zweier Zahlen dar, und heisst deshalb formelle Summe; dagegen ist 16 die wirkliche Summe.

Die formelle Summe $7 + 9$ ist die Lösung folgender Aufgaben: Zu der Zahl 7 soll die Zahl 9 addiert werden. Die Zahl 7 soll um 9 vermehrt werden. Wie heisst die um 9 vermehrte Zahl? Welche Zahl ist um 9 grösser als 7? Welche Zahl übertrifft die Zahl 7 um 9? Welches ist die Summe der Zahlen 7 und 9?

2. Sollen mehrere Zahlen zu einander addiert werden, so vereinigt man zuerst zwei zu einer Summe, addiert hiezu die dritte Zahl u. s. w.

z. B. $5 + 7 + 6 + 3 = 12 + 6 + 3 = 18 + 3 = 21$.

Da $7 + 9 = 16$ und auch $9 + 7 = 16$, so folgt $7 + 9 = 9 + 7$, d. h.: „In einer Summe kann man die Summanden beliebig vertauschen.“

Also ist auch

$5 + 7 + 6 + 3 = 3 + 6 + 7 + 5 = 7 + 3 + 5 + 6 = 21$.

Null zu einer Zahl addiert, ändert deren Wert nicht; es ist $7 + 0 = 0 + 7 = 7$.

Da die Reihenfolge der Summanden gleichgültig ist, so addiert man:

$$\begin{array}{ccccccc} 23 & + & 19 & + & 92 & + & 77 & + & 50 & + & 8 & + & 49 & + & 6 & + & 81 & + & 51 & = \\ 23 & + & 77 & + & 19 & + & 81 & + & 92 & + & 8 & + & 49 & + & 51 & + & 50 & + & 6 & = \\ \hline 100 & + & 100 & + & 100 & + & 100 & + & 56 & = & 456 \end{array}$$

3. Sind grössere Zahlen zu addieren, so addiert man, bei den Einern beginnend, die Einheiten gleicher Ordnung, wobei die höheren Stellen der gefundenen Summen in die Summe der zunächstfolgenden gleichnamigen Stellen aufgenommen werden. Am besten schreibt man hiebei die Zahlen so an, dass die Einheiten gleicher Ordnung genau unter einander zu stehen kommen; z. B.

$$\begin{array}{r} 15036 \\ + 4100227 \\ + 643 \\ + 210410 \\ + 6 \\ + 703 \\ + 57121647 \\ \hline 1 \quad 213 \\ 61448672 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 374051 \\ 3190 \\ 61008 \\ 29 \\ 9240087 \\ 645 \\ 521090 \\ \hline 10200100 \end{array}$$

Um die Richtigkeit der ausgeführten Addition zu kontrollieren, nimmt man die Addition auch in umgekehrter Ordnung vor.

Subtraktion.

§ 8.

1. Es ist $7 + 4 = 11$. Wird nun verlangt, einen der Summanden 7 oder 4 aufzusuchen, wenn die Summe 11 und der andere Summand 4 oder 7 gegeben ist, so hat man, um

die 7 Einheiten zu erhalten, zuerst 11 Einheiten abzuzählen und darauf wieder 4 Einheiten zurückzuzählen, und um den Summanden 4 zu erhalten, hat man zuerst 11 Einheiten abzuzählen und darauf 7 Einheiten zurückzuzählen. Diese beiden Umkehrungen der Addition erfolgen somit durch dasselbe Verfahren, fallen daher in eine Umkehrung zusammen, und man nennt diese Umkehrung **Subtraktion**.

Subtrahieren (abziehen) heisst also zu einer gegebenen Summe und gegebenem einen Summanden den anderen Summanden aufsuchen.

Die gegebene Summe, also die Zahl, von welcher subtrahiert wird, nennt man jetzt **Minuend**, den gegebenen Summanden, also die Zahl, welche subtrahiert wird, **Subtrahend**, endlich den erhaltenen anderen Summanden, also das Resultat der Subtraktion, **Differenz** oder Unterschied. Das Zeichen der Subtraktion ist ein wagrechter Strich (—), ausgesprochen: minus (weniger). Man hat also z. B.

$$\begin{array}{ccccccc}
 11 & - & 4 & = & 7 & & \\
 \text{formelle} & & & & \text{wirkliche} & & \\
 \hline
 & & \text{Differenz} & & & \text{ausgesprochen:} & \\
 11 & \text{minus} & 4 & \text{ist gleich} & 7 & & \\
 \text{Minuend} & - & \text{Subtrahend} & = & \text{Differenz.} & &
 \end{array}$$

Der Minuend steht immer vor, der Subtrahend nach dem Subtraktionszeichen.

2. Nachdem nun die Aufgabe, von der Zahl 11 die Zahl 4 zu subtrahieren, verlangt, es soll eine dritte Zahl 7 aufgesucht werden, welche mit der Zahl 4 die Summanden einer Summe bildet, während diese selbst den Wert 11 hat, so muss, wenn $11 - 4 = 7$ ist, die Bedingung bestehen

$$\begin{array}{ccccccc}
 7 & + & 4 & = & 11 & & \\
 \text{Differenz} & + & \text{Subtrahend} & = & \text{Minuend} & &
 \end{array}$$

a) Man erhält also den Minuenden, wenn man zur Differenz den Subtrahenden addiert.

Zugleich ergibt sich hieraus für die Subtraktion folgende weitere Definition:

Von einer Zahl eine zweite Zahl subtrahieren heisst eine dritte Zahl aufsuchen, zu welcher man die zweite addieren muss, um die erste als Summe zu erhalten.

Da endlich wieder aus $7 + 4 = 11$ sich der Summand 4

durch Subtraktion des anderen Summanden 7 von der Summe 11 ergibt, so folgt

$$\begin{array}{rcccl} 11 & - & 7 & = & 4 \\ \text{Minuend} & - & \text{Differenz} & = & \text{Subtrahend.} \end{array}$$

b) Man erhält also den Subtrahenden, wenn man vom Minuenden die Differenz subtrahiert.

Die beiden Beziehungen a) und b) kann man als Kontrolle (Probe) für die Richtigkeit einer ausgeführten Subtraktion benutzen.

Die formelle Differenz $11 - 4$ ist die Lösung folgender Aufgaben: Subtrahiere die Zahl 4 von der Zahl 11. Wie heisst die um 4 verminderte Zahl 11? Welches ist der Unterschied (die Differenz) zwischen den Zahlen 11 und 4? Um wie viel ist 11 grösser als 4? Um wie viel ist 4 kleiner als 11? Um wie viel übertrifft 11 die Zahl 4? Um wie viel wird 4 von der Zahl 11 übertroffen? Welche Zahl muss man zu 4 addieren, um die Zahl 11 zu erhalten? Welche Zahl hat man von 11 zu subtrahieren, um die Zahl 4 zu erhalten? Wenn die Differenz zweier Zahlen 4 beträgt und die grössere 11 ist, wie heisst die kleinere?

3. Ist der Subtrahend dem Minuenden gleich, so wird die Differenz durch Null bezeichnet; z. B. $15 - 15 = 0$, denn es ist $0 + 15 = 15$.

Null von einer Zahl subtrahiert ändert deren Wert nicht; z. B. $9 - 0 = 9$, denn $9 + 0 = 9$, oder $9 - 9 = 0$.

4. Um bei grösseren Zahlen die Subtraktion leichter auszuführen, subtrahiert man, bei den Einern beginnend, die Einheiten gleicher Ordnung. Ist dabei an einer einzelnen Stelle der Minuend kleiner als der Subtrahend, so nimmt man von der nächst höheren Stelle, und wenn an dieser eine Null steht, von der zweit höheren u. s. f. eine Einheit herüber und zerlegt sie in Einheiten niedrigerer Ordnung: z. B.

538 204716	Rechne: 4 von 6 bleibt 2,
— 352 723954	5 „ 11 „ 6,
185 480762	9 „ 16 „ 7,
	3 „ 3 „ 0,
	2 „ 10 „ 8 u. s. f.

5. Auf der Eigenschaft, dass Differenz plus Subtrahend, also auch Subtrahend plus Differenz gleich Minuend, beruht folgendes Subtraktionsverfahren, welches dem vorigen vorzuziehen ist. Rechne:

	4 u. 2	ist 6
	5 u. 6	ist 11 (bleibt 1)
1 u. 9 ist	10 u. 7	ist 17 (bleibt 1)
1 u. 3 ist	4 u. 0	ist 4
	2 u. 8	ist 10 (bleibt 1)
1 u. 7 ist	8 u. 4	ist 12 (bleibt 1) u. s. f.

Die vor dem Striche stehenden Ziffern werden angeschrieben, denn sie bilden die einzelnen Ziffern der Differenz, welche zu denen des Subtrahenden addiert die Ziffern des Minuenden geben.

Multiplikation.

§ 9.

1. Eine Zahl mit einer zweiten Zahl multiplizieren (vervielfachen) heisst die erste Zahl so oft als Summanden setzen, als die zweite Zahl Einheiten enthält.

Die Zahl, welche als Summand gesetzt werden soll, heisst **Multiplikand**, und die Zahl, welche anzeigt, wie oft die andere als Summand gesetzt werden soll, heisst **Multiplikator**. Das Resultat der Multiplikation wird **Produkt** (Ergebnis) genannt. Das Zeichen der Multiplikation ist ein Punkt ($\cdot$), ausgesprochen „multipliziert mit“. Der Multiplikand steht vor, der Multiplikator nach dem Operationszeichen, z. B.

$4 + 4 + 4 = 12$ (die Zahl 4 ist 3mal als Summand gesetzt).

$$4 \cdot 3 = 12$$

formelles wirkliches

Produkt

ausgesprochen:

4 multipliziert mit 3 ist gleich 12

Multiplikand · Multiplikator = Produkt.

Das Multiplikationszeichen pflegt man auch kurz durch das Wörtchen „mal“ auszusprechen; in diesem Falle erfordert aber dann der Sprachgebrauch, den Multiplikator zuerst zu nennen, das Produkt $4 \cdot 3$ also zu lesen „3mal 4“.

Das formelle Produkt $4 \cdot 3$ ist die Lösung folgender Aufgaben: Multipliziere die Zahl 4 mit der Zahl 3. Welches ist das Produkt der Zahlen 4 und 3? Wie heisst das Produkt, dessen Faktoren 4 und 3 sind? Welche Zahl ist 3mal grösser als 4? Welche Zahl ist 3mal so gross als 4? Wie heisst das 3fache von 4? Was erhält man, wenn man die Zahl 4 3mal nimmt? Was gibt eine Summe aus 3 Summanden, von denen jeder 4 heisst? Man soll die Zahl 4 als Summanden 3mal setzen. Man soll die Zahl 4 zu sich selbst noch 2mal (nicht 3mal!) addieren.

$$2. \text{ Da } 4 \cdot 3 = 4 + 4 + 4 = 1 + 1 + 1 + 1$$

$$+ 1 + 1 + 1 + 1$$

$$+ 1 + 1 + 1 + 1$$

$$= 3 + 3 + 3 + 3 = 3 \cdot 4$$

(die Reihenfolge der Summanden ist gleichgültig, und man erhält durch Addition der vertikalen Reihen 4mal die Summe 3),

so folgt, das $4 \cdot 3 = 3 \cdot 4 = 12$, d. h.

„In einem Produkte kann man Multiplikand und Multiplikator mit einander vertauschen, ohne dass sich der Wert des Produktes ändert.“

Multiplikand und Multiplikator erhalten daher den gemeinsamen Namen **Faktoren**.

Infolge der Vertauschbarkeit von Multiplikand und Multiplikator ist es sehr gebräuchlich, insbesondere bei der Anwendung des sogenannten „Einmaleins“, den Multiplikator nicht nur zuerst zu sprechen, sondern ihn auch zuerst zu schreiben, also die Summe $4 + 4 + 4$, oder das Produkt „3mal 4“ zu schreiben $3 \cdot 4$. Das ist nun eigentlich nicht korrekt, aber bequem, und mag deshalb immerhin gelten, nachdem ja der Wert des Produktes $3 \cdot 4$ derselbe ist wie der Wert des Produktes $4 \cdot 3$, beim praktischen Rechnen aber lediglich der Wert und nicht die Form des Produktes in betracht kommt.

3. Die Produkte $5 \cdot 1$ und $5 \cdot 0$ haben eigentlich nach der Erklärung der Multiplikation keinen Sinn. Da jedoch die Vertauschung der Faktoren auch für die Zahlen 1 und 0 angewendet werden darf, so ergibt sich

$$5 \cdot 1 = 1 \cdot 5 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 5, \text{ also}$$

„Eine Zahl mit 1 multipliziert ändert ihren Wert nicht.“

$$5 \cdot 0 = 0 \cdot 5 = 0 + 0 + 0 + 0 + 0 = 0, \text{ also}$$

„Eine Zahl mit 0 multipliziert gibt den Wert 0.“

4. Sollen mehrere Zahlen mit einander multipliziert werden, so vereinigt man zuerst zwei zu einem Produkte, multipliziert dieses mit der dritten Zahl u. s. f. Die Reihenfolge der einzelnen Faktoren ist dabei beliebig; z. B.

$$\begin{aligned} 2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 7 &= 8 \cdot 3 \cdot 7 = 24 \cdot 7 = 168, \text{ oder auch} \\ 7 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 2 &= 21 \cdot 4 \cdot 2 = 84 \cdot 2 = 168. \end{aligned}$$

Jedes Produkt, in dem auch nur ein Faktor 0 ist, hat den Wert 0; z. B. $7 \cdot 0 \cdot 3 = 0 \cdot 7 \cdot 3 = 0 \cdot 21 = 0$.

5. Soll die Zahl 3 mit 10 multipliziert werden, also einen 10mal grösseren Wert erhalten, so muss dieselbe dem Dezimalsysteme zufolge um eine Stelle nach links gerückt werden, was dadurch geschieht, dass man an die frei werdende Stelle eine 0 setzt; man erhält dann als Produkt die Zahl 30. Soll die Zahl 5 mit 100 multipliziert werden, so ist dieselbe um 2 Stellen nach links zu verrücken und die beiden frei werdenden Stellen sind durch Nullen auszufüllen, so dass man als Produkt erhält die Zahl 500; ebenso ist $7 \cdot 1000 = 7000$. Daraus folgt: Eine Zahl wird mit 10, 100, 1000 u. s. f.

multipliziert, indem man derselben rechts so viele Nullen anfügt, als der Multiplikator rechts Nullen hat.

Es ist $7000 \cdot 120 = 7 \cdot 1000 \cdot 12 \cdot 10 = 7 \cdot 12 \cdot 1000 \cdot 10 = 84 \cdot 10000 = 840000$; daraus folgt: Sind Zahlen mit rechts angehängten Nullen mit einander zu multiplizieren, so führt man die Multiplikation ohne Rücksicht auf die Nullen aus und fügt dem Produkte rechts so viele Nullen an, als die Faktoren zusammen rechts Nullen haben.

6. Beachtet man, dass $7 \cdot 5 = 35$, aber auch, wenn man 7 in zwei Summanden $4 + 3$ zerlegt, $4 \cdot 5 + 3 \cdot 5 = 20 + 15 = 35$, so lässt sich jede beliebige Zahl mit einer einzifferigen Zahl multiplizieren, wenn man erstere in Summanden zerlegt, diese sämtlich mit dem Multiplikator multipliziert, und die erhaltenen Teilprodukte addiert. Ist also $538 \cdot 6$ auszuführen, so hat man, da $538 = 500 + 30 + 8$ ist,

$$\begin{array}{rcl} 8 \cdot 6 & = & 48 \\ 30 \cdot 6 & = & 180 \\ 500 \cdot 6 & = & 3000 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{rcl} 8 \cdot 6 & = & 48 \\ 30 \cdot 6 & = & 180 \\ 500 \cdot 6 & = & 3000 \end{array}} \right\} \text{Teilprodukte}$$

also $538 \cdot 6 = 3228$ Hauptprodukt.

Jede Ziffer des Multiplikanden von rechts nach links ist demnach unter Berücksichtigung ihres Stellwertes zu multiplizieren, und es ergibt sich die Regel:

Sind zwei Zahlen, eine mehrstellige und eine einstellige, mit einander zu multiplizieren, so wählt man letztere zum Multiplikator und multipliziert, mit der Einerstelle beginnend, sämtliche Ziffern des Multiplikanden der Reihe nach, wobei man die höhere Stelle jedes gefundenen Teilproduktes sogleich zu dem Teilprodukte der nächstfolgenden gleichnamigen Stelle addiert: z. B.

$$25908 \cdot 9 = 233172; \quad 7 \cdot 37859 = 265013.$$

Mit den zwischen 10 und 20 liegenden zweistelligen Zahlen gewöhne man sich wie mit einstelligen zu multiplizieren: z. B. $37586 \cdot 12 = 451032$; $17 \cdot 58047 = 986799$.

Rechne:	12 mal 6 ist 72	17 mal 7 ist 119
12 mal 8 ist 96 u. 7 „	103	17 mal 4 ist 68 u. 11 „
12 „ 5 „ 60 u. 10 „	70	17 „ 0 „ 0 u. 7 „
12 „ 7 „ 84 u. 7 „	91	17 „ 8 „ 136
	u. s. w.	u. s. w.

7. Beachtet man ferner, dass $7 \cdot 5 = 35$, aber auch, wenn man 5 in zwei Summanden $3 + 2$ zerlegt, $7 \cdot 3 + 7 \cdot 2 = 21 + 14 = 35$, so lässt sich jede beliebige Zahl mit einer mehrzifferigen Zahl multiplizieren, wenn man letztere in Summanden zerlegt, den Multiplikanden mit diesen sämtlichen

Summanden multipliziert, und die erhaltenen Teilprodukte addiert. Ist z. B. das Produkt $7863 \cdot 3748$ auszuführen, so hat man, da $3748 = 3000 + 700 + 40 + 8$ ist,

$$\begin{array}{rcl}
 & 7863 \cdot 3748 & \text{oder} \quad 7863 \cdot 3738 \\
 7863 \cdot 3000 = & 23589000 & 7863 \cdot 8 = 62904 \\
 7863 \cdot 700 = & 5504100 & 7863 \cdot 40 = 31452 \cdot \\
 7863 \cdot 40 = & 314520 & 7863 \cdot 700 = 55041 \cdot \cdot \\
 7863 \cdot 8 = & 62904 & 7863 \cdot 3000 = 23589 \cdot \cdot \cdot \\
 \hline
 7863 \cdot 3748 = & 29470524 & 29470524
 \end{array}$$

Die den Teilprodukten anzuhängenden Nullen können entweder durch Punkte ersetzt, oder noch einfacher ganz weggelassen werden.

Hieraus ergibt sich als Regel:

Zwei mehrstellige Zahlen werden mit einander multipliziert, indem man jede Stelle des einen Faktors mit jeder Stelle des andern Faktors multipliziert, die Teilprodukte unter Berücksichtigung des Stellenwertes untereinander schreibt [jedes folgende Teilprodukt wird um eine Stelle nach rechts oder links gerückt], und sodann addiert.

Da jedes Produkt mit dem Faktor 0 selbst Null wird, so kann jede Null des Multiplikators übergangen werden; nur hat man dann die Stellenwerte der Ziffern desselben wohl zu beachten; z. B.

$$\begin{array}{rcl}
 & 80752 \cdot 600409 & 80752 \cdot 600409 \\
 \hline
 & 726768 & 484512 \\
 & 323008 \cdot & \text{oder} \quad 323008 \\
 & 484512 \cdot \cdot & 726768 \\
 \hline
 & 48484227568 & 48484227568
 \end{array}$$

8. Um die Multiplikation zweier mehrstelligen Zahlen möglichst rasch auszuführen, wählt man denjenigen Faktor als Multiplikator, welcher die wenigsten geltenden Ziffern enthält. Kommt dabei in einem Faktor die Ziffer 1 vor, so kann man den anderen Faktor selbst als das Teilprodukt desselben mit 1 betrachten; z. B.

$$\begin{array}{rcl}
 6385 \cdot 149 & 491 \cdot 6385 & 419 \cdot 6385 \\
 \hline
 25540 & 57465 & 57465 \\
 57465 & 25540 & 25540 \\
 \hline
 951365 & 3135035 & 2675315 \\
 6385 \cdot 1049 & 4901 \cdot 6385 & 6385 \cdot 4109 \\
 \hline
 25540 & 57465 & 25540 \\
 57465 & 25540 & 57465 \\
 \hline
 6697865 & 31292885 & 26235965
 \end{array}$$

Anmerkung. Da das Produkt aus zwei Zahlen lediglich die Abkürzung für eine Summe aus lauter gleichen Summanden ist, so folgt umgekehrt: Jede Summe, deren Summanden alle einander gleich sind, ist gleich einem Produkte, dessen einer Faktor (der Multiplikand) der gleiche Summand, und dessen anderer Faktor (der Multiplikator) die Anzahl der vorhandenen Summanden ist; also $7 + 7 + 7 + 7 = 7 \cdot 4$.

Division.

§ 10.

1. Es ist $5 \cdot 3 = 15$. Wird nun verlangt, aus dem Werte des Produktes 15 und einem der Faktoren 5 oder 3 den anderen Faktor 3 oder 5 aufzusuchen, so wird, da in einem Produkte die Faktoren mit einander vertauscht werden können, das Verfahren, nach welchem der Multiplikand 5 bestimmt wird, das nämliche sein müssen wie das Verfahren, nach welchem der Multiplikator 3 bestimmt wird, und es fallen daher diese beiden Umkehrungen der Multiplikation in eine einzige Operation zusammen, welche man **Division** nennt.

Dividieren (teilen) heisst also zu einem gegebenen Produkte und gegebenem einen Faktor den anderen Faktor aufsuchen.

Das gegebene Produkt, also die Zahl, welche dividiert werden soll, nennt man dann **Dividend**, den gegebenen Faktor, also die Zahl, durch welche dividiert wird, **Divisor**, und den gesuchten Faktor, also das Resultat der Division, **Quotient**.

Als Operationszeichen der Division gebraucht man einen Doppelpunkt (:), oder auch einen wagrechten Strich (—), gelesen: „dividiert durch“. Der Dividend steht immer vor dem Doppelpunkt oder über dem Strich, der Divisor nach dem Doppelpunkt oder unter dem Strich. Man hat also z. B.

$15 : 5 = 3$
formeller wirklicher

Ebenso kann man
auch schreiben:

Quotient ausgesprochen: $\frac{15}{5} = 3$

15 dividiert durch 5 ist gleich 3

Dividend : Divisor = Quotient.

2. Nachdem nun der gegebenen Erklärung zufolge der Quotient 3 der eine und der Divisor 5 der andere Faktor eines Produktes ist, welches zum Werte den Dividenden 15 hat, so muss, wenn $15 : 5 = 3$ ist, die Bedingung bestehen

$$3 \cdot 5 = 15$$

Quotient · Divisor = Dividend.

a) Man erhält also den Dividenden, wenn man den Quotienten mit dem Divisor multipliziert.

Zugleich ergibt sich hieraus für die Division folgende weitere Definition:

Eine Zahl durch eine zweite Zahl **dividieren** heisst eine dritte Zahl aufsuchen, welche mit der zweiten Zahl multipliziert die erste als Produkt gibt.

Da endlich wieder aus $3 \cdot 5 = 15$ sich der Faktor 5 durch Division des Produktes 15 durch den anderen Faktor 3 ergibt, so folgt

$$\begin{array}{ccccccc} 15 & : & 3 & = & 5 \\ \text{Dividend} & : & \text{Quotient} & = & \text{Divisor.} \end{array}$$

b) Man erhält also den Divisor, wenn man den Dividenten durch den Quotienten dividiert.

Die beiden Beziehungen a) und b) kann man als Kontrolle (Probe) für die Richtigkeit einer ausgeführten Division benützen.

3. Da der Quotient $15 : 5$ die Bedeutung hat, zu einem gegebenen Produkte 15 und gegebenem einen Faktor 5 den anderen Faktor 3 aufzusuchen, der gegebene Faktor 5 aber sowohl als Multiplikator, wenn $3 \cdot 5 = 15$, aber auch als Multiplikand, wenn $5 \cdot 3 = 15$, angesehen werden kann, so lässt die Division eine zweifache Auffassung zu:

a) Wird der Divisor als Multiplikator betrachtet, so ist die Anzahl der Teile gegeben und gesucht wird die Grösse eines Teiles. $15 : 5$ bedeutet also, die Zahl 15 soll in 5 gleiche Teile geteilt und die Grösse eines solchen Teiles angegeben werden. Die Division ist hier die Umkehrung der Multiplikation (Teilung).

b) Wird der Divisor aber als Multiplikand betrachtet, so ist die Grösse eines Teiles gegeben und gesucht wird die Anzahl der Teile. Der Quotient $15 : 5$ bedeutet also, wie oft kann man die Zahl 5 von 15 wegnehmen, oder wie oft muss man die Zahl 5 als Summanden setzen, um die Zahl 15 zu erhalten, oder auch wie oft ist die Zahl 5 in 15 enthalten? Die Division ist also hier eine wiederholte Subtraktion; $15 - 5 - 5 - 5 = 0$, die Zahl 5 lässt sich 3 mal von 15 wegnehmen, also ist $15 : 5 = 3$ (Messung).

Der formelle Quotient $15 : 5$ ist die Lösung folgender Aufgaben: Welches ist der Quotient der Zahlen 15 und 5? Welches ist der 5. Teil von 15? Der wievielte Teil von 15 ist die Zahl 5? Wie oft ist die Zahl 5 in 15 enthalten? Wie oft lässt sich die Zahl 5 von 15 subtrahieren (wegnehmen)? Wie oft muss man die Zahl 5 als Summanden setzen, um die Zahl 15 zu erhalten? Wie vielmal ist 15 grösser als 5? Wie vielmal ist 5 kleiner als 15? Welche Zahl ist 5 mal kleiner als 15? Das 5 fache einer Zahl ist 15; wie heisst die Zahl? Mit welcher Zahl muss 5 multipliziert werden, damit man als Produkt 15 erhält? Durch welche Zahl muss 15 dividiert werden, damit man als Quotienten 5 erhält? Wenn das Produkt zweier Zahlen 15 beträgt und die eine der

Zahlen 5 ist, wie heisst die andere? Der Wert eines Quotienten ist 5; wie heisst der Divisor, wenn der Dividend 15 ist? Der Quotient zweier Zahlen beträgt 5; welches ist die kleinere Zahl, wenn die grössere 15 heisst?

4. Eine Zahl durch 1 dividiert ändert ihren Wert nicht.

$$17 : 1 = 17; \text{ denn } 1 \cdot 17 = 17.$$

Eine Zahl durch sich selbst dividiert gibt 1.

$$14 : 14 = 1; \text{ denn } 1 \cdot 14 = 14.$$

Null durch eine Zahl dividiert gibt Null.

$$0 : 12 = 0; \text{ denn } 0 \cdot 12 = 0.$$

5. Sehr häufig ist der Divisor im Dividenden nicht ohne **Rest** enthalten, d. h. es findet sich dann nicht eine ganze Zahl, welche mit dem Divisor multipliziert den Dividenden gibt. In diesem Falle muss das Dividieren so lange fortgesetzt werden, bis der Rest kleiner wird als der Divisor. Der Quotient heisst alsdann unvollständig, und das um den Rest vermehrte Produkt aus Quotient und Divisor gibt den Dividenden; z. B.

58 : 9 gibt als Quotienten 6 und als Rest 4, daher ist

$$6 \cdot 9 + 4 = 54 + 4 = 58.$$

6. Beachtet man, dass $39 : 3 = 13$, dass aber auch, wenn man 39 in Summanden $27 + 12$ zerlegt, $27 : 3 + 12 : 3 = 9 + 4 = 13$, so lässt sich jede beliebige Zahl durch eine einzifferige Zahl dividieren, wenn man erstere in Summanden zerlegt, diese sämtlich durch den Divisor dividiert und die erhaltenen Teilquotienten sodann addiert. Ist z. B. $29672 : 8$ auszuführen, so hat man, da $29672 = 29000 + 600 + 70 + 2$ ist,

$$\begin{array}{r} 29000 : 8 = 3000 + \\ - 24000 \\ \hline 5000 \text{ Rest} \\ + 600 \\ \hline 5600 : 8 = 700 + \\ - 5600 \\ \hline 000 \text{ Rest} \\ + 70 \\ \hline 70 : 8 = 00 + \\ - 00 \\ \hline 70 \text{ Rest} \\ + 2 \\ \hline 72 : 8 = 9 \\ - 72 \\ \hline 0 \text{ Rest} \end{array}$$

29 Eintausender div. durch 8 gibt 3 Eintausender. Da aber $3000 \cdot 8 = 24$ Eintausender, so bleiben Rest 5 Eintausender, oder 50 Hunderter. Hiezu 6 Hunderter gibt 56 Hunderter. Diese div. durch 8 gibt 7 Hunderter. Da aber $700 \cdot 8 = 56$ Hunderter, so bleiben Rest 0 Hunderter, oder 00 Zehner. Hiezu 7 Zehner gibt 7 Zehner. Diese div. durch 8 gibt 0 Zehner, u. s. f.

Es ist demnach

$$29672 : 8 = 3000 + 700 + 9 = 3709.$$

Hieraus ergibt sich die Art und Weise, wie man eine beliebige Zahl durch eine einzifferige Zahl dividieren kann, nämlich:

Man dividirt die höchste Stelle des Dividenden durch den Divisor, multipliziert den erhaltenen Teilquotienten mit dem Divisor, subtrahiert das Produkt vom Dividenden, und verfährt mit dem bleibenden Reste ebenso, bis entweder die Division aufgeht, oder ein Rest bleibt, der kleiner ist als der Divisor. Der Quotient ist alsdann die Summe aus den einzelnen Teilquotienten; z. B.

$$\begin{array}{r}
 29672 : 8 = 3000 + 700 + 9 = 3709 \\
 \underline{- 24000} \\
 5600 \\
 \underline{- 5600} \\
 72 \\
 \underline{- 72} \\
 0
 \end{array}$$

Lässt man die Nullen weg, so braucht man bloss mit jeder folgenden Ziffer des Quotienten um eine Stelle weiter nach rechts zu rücken, und schreibt dann:

$$\begin{array}{r}
 29672 : 8 = 3709 \\
 24 \\
 \underline{56} \\
 56 \\
 \underline{7} \\
 0 \\
 72 \\
 72 \\
 \underline{0}
 \end{array}$$

Aus dem Dividenden nimmt man eine Stelle nach der andern zu dem jedesmal bleibenden Rest herunter.

7. Dasselbe Verfahren gilt auch für die Division durch eine mehrzifferige Zahl; z. B.

$$277563122 : 3748 = 70000 + 4000 + 50 + 6 = 74056$$

$ \begin{array}{r} 262360000 \\ \underline{15203122} \\ 14992000 \\ \underline{211122} \\ 187400 \\ \underline{23722} \\ 22488 \\ \underline{1234} \text{ Rest} \end{array} $	oder mit Hinweglassung der Nullen kürzer: $ \begin{array}{r} 277563122 : 3748 = 74056 \\ 26236 \\ \underline{15203} \\ 14992 \\ \underline{21112} \\ 18740 \\ \underline{23722} \\ 22488 \\ \underline{1234} \text{ Rest.} \end{array} $	Quotient.
--	---	------------------

Rechne: 37 in 277 geht 7mal. 7mal 3748 gibt 26236. Subtrah. gibt 1520. Die Ziffer 3 heruntergenommen. 37 in 152 geht 4mal u. s. f.

8. Eine bedeutende Abkürzung gewährt endlich noch das früher angeführte Subtraktionsverfahren. Man schreibt nämlich die Produkte aus den einzelnen Teilquotienten und dem Divisor gar nicht an und führt die Subtraktion derselben dadurch aus, dass man die bleibenden Reste zu ihnen addiert. Also:

$$\begin{array}{r}
 277563122 : 3748 = 74056 \\
 15203 \\
 21112 \\
 23722 \\
 \text{Rest } 1234
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 \text{Rechne: } 3748 \text{ in } 27756 \text{ geht } 7 \text{ mal.} \\
 7 \text{ mal } 8 \text{ ist } 56 \text{ u. } 0 \text{ ist } 56 \text{ (0 angeschr., bleibt } 5) \\
 7 \text{ mal } 4 \text{ ist } 28 \text{ u. } 5 \text{ ist } 33 \text{ u. } 2 \text{ ist } 35 \text{ (2 " " 3)} \\
 7 \text{ " } 7 \text{ ist } 49 \text{ u. } 3 \text{ ist } 52 \text{ u. } 5 \text{ ist } 57 \text{ (5 " " 5)} \\
 7 \text{ " } 3 \text{ ist } 21 \text{ u. } 5 \text{ ist } 26 \text{ u. } 1 \text{ ist } 27 \text{ (1 " " 0)}; \\
 \text{die nächste Ziffer } 3 \text{ heruntergenommen u. s. f.}
 \end{array}$$

9. Probe der Division:

$$\begin{array}{l}
 \text{Quotient} \cdot \text{Divisor} + \text{Rest} = \text{Dividend (nach 5.)} \\
 74056 \cdot 3748 + 1234 = 277563122,
 \end{array}$$

oder:

$$\begin{array}{r}
 277563122 \text{ Dividend} \\
 - 1234 \text{ Rest} \\
 \hline
 277561888 : 74056 = 3748 \\
 \text{Quotient Divisor.}
 \end{array}$$

d. h. der um den Rest verminderte Dividend durch den Quotienten dividiert gibt den Divisor.

10. Soll eine Zahl durch 10 dividiert werden, so muss jede Ziffer derselben den zehnten Teil ihres früheren Wertes erhalten, also an die nächst niedrigere Stelle zu stehen kommen. Dieses erreicht man einfach dadurch, dass man im Dividenten die letzte Ziffer rechts wegstreicht, welche dann den bleibenden Rest bei unvollständigem Quotienten bildet. Hat man durch 100 zu dividieren, so streicht man aus gleichem Grunde die beiden letzten Stellen rechts fort, u. s. w.; z. B.

$$\begin{array}{l}
 37|0 : 10 = 37; \quad 45|8 : 10 = 45, \text{ Rest } 8; \\
 480|00 : 100 = 480; \quad 36|280 : 1000 = 36, \text{ Rest } 280.
 \end{array}$$

Endigt überhaupt der Divisor rechts auf Nullen, so schneidet man diese und ebenso viele rechts stehende Stellen des Dividenten ab, worauf man die Division ausführt. Geht dieselbe auf, so bilden die abgeschnittenen Stellen des Dividenten den Rest, im anderen Falle werden sie dem Reste angefügt; z. B.

$$4752|28 : 8|00 = 594 \text{ (Quot.)}$$

$$28 \text{ Rest}$$

$$378420|30 : 58|00 = 6524$$

$$304$$

$$5217|426 : 15|000 = 347 \text{ (Quot.)}$$

$$12426 \text{ Rest}$$

$$142$$

$$260$$

$$2830 \text{ Rest.}$$

Anmerk. Bequem ist folgendes Divisionsverfahren. Bezeichnet D den Dividenten, d den Divisor, q den Quotienten und r den Rest, so ist $D = q \cdot d + r$, also $r = D - q \cdot d$. Ist nun n die sovielte Potenz von 10, soviel der Divisor Zifferstellen hat, so ist auch

$$r = D + q \cdot 10^n - q \cdot d - q \cdot 10^n \text{ oder}$$

$$r = D + q \cdot (10^n - d) - q \cdot 10^n$$

Will man demzufolge z. B. $5678 : 729$ ausführen, so hat man $n = 3$, also $10^n = 1000$, und $10^n - d = 1000 - 729 = 271$, somit

$$\begin{array}{r} \text{D} \quad \text{d} \quad \text{q} \\ 5678 : 729 = 7 \\ q \cdot (10^n - d) = 1897 \quad 271 = (10^n - d) \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{Kurz } 5678 : 729 = 7 \\ + 1897 \text{ (271)} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{add. } 7575 \\ q \cdot 10^n = 7000 \text{ subtr.} \\ \hline 575 = r \end{array}$$

(7)575 Rest
Das Teilprodukt 1897 und die Ziffer (7) brauchen dabei gar nicht angeschrieben zu werden.

$$\begin{array}{r} 27654 : 289 = 95 \\ 6399 \text{ (711)} \\ \hline (9)1644 \\ 3555 \\ \hline (5)199 \text{ Rest} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{Kurz } 27654 : 289 = 95 \\ 1644 \text{ (711)} \\ \hline 199 \text{ Rest} \end{array}$$

Zahlenausdrücke.

§ 11.

Zahlenausdruck nennt man die Verbindung zweier oder mehrerer Zahlen durch irgend welche Operationszeichen der verschiedenen Rechnungsarten.

Es gibt einfache und zusammengesetzte Zahlenausdrücke. Die einfachen sind:

die **Summe**, z. B. $7 + 8$, das **Produkt**, z. B. $7 \cdot 5$,
die **Differenz**, z. B. $9 - 6$, der **Quotient**, z. B. $12 : 4$.

Die zusammengesetzten Zahlenausdrücke bestehen aus einer Vereinigung von einfachen Zahlenausdrücken. Dieselben sind entweder von der ersten Art, oder von der zweiten Art, oder endlich gemischter Art.

Werden einfache Zahlenausdrücke durch Operationszeichen der verschiedenen Rechnungsarten mit anderen Zahlen, oder auch mit anderen Ausdrücken verbunden, so setzt man dieselben, um die auszuführenden Operationen genau zu kennzeichnen, in Klammern, z. B. $(\dots)$, $(\dots)$, $[\dots]$, $\{\dots\}$.

In solche Klammern müssen immer gesetzt werden Summe und Differenz, sobald diese durch irgend ein Operationszeichen mit einer anderen Zahl oder auch mit einem anderen Ausdruck verbunden werden.

Dagegen bleiben die Klammern weg bei einem Produkte oder Quotienten, wenn diese durch die Zeichen der Addition oder Subtraktion mit einer anderen Zahl oder einem anderen Ausdruck verbunden werden.

Ebenso können die Klammern wegbleiben bei Produkten oder Quotienten, wenn sie selbst mit anderen Zahlen oder Ausdrücken multipliziert oder durch solche dividiert werden; in diesem Falle werden die einzelnen Operationen in der Reihenfolge ausgeführt, in welcher sie angegeben sind. Dagegen können die Klammern nicht wegbleiben bei Produkten und Quotienten, wenn andere Zahlen oder Ausdrücke mit ihnen multipliziert oder durch sie dividiert werden.

Zahlenausdrücke der ersten Art.

§ 12.

1. Ein Zahlenausdruck ist von der ersten Art, wenn in demselben nur Operationen der ersten Art, also Addition und Subtraktion, vorkommen. Ein solcher Ausdruck heisst auch eine algebraische Summe oder ein Aggregat. Die einzelnen durch „plus“ oder „minus“ mit einander verbundenen Zahlen heissen Glieder, und zwar die mit dem Vorzeichen + positiv (additiv), die mit dem Vorzeichen — minus (subtraktiv). Steht vor einem Gliede kein Zeichen, so ist dasselbe als positiv zu betrachten.

2. Um ein Aggregat zu berechnen, vereinigt man, bei einem positiven Gliede beginnend, die einzelnen Glieder paarweise; dabei ist die Reihenfolge, nach welcher dies geschieht, gleichgültig; z. B.

$$\begin{array}{rcl}
 12+5-6-2+7+1-9 & = & \text{od. } 12+5+7+1-6-2-9= \\
 17-6-2+7+1-9 & = & 17+7+1-6-2-9= \\
 11-2+7+1-9 & = & 24+1-6-2-9= \\
 9+7+1-9 & = & 25-6-2-9= \\
 16+1-9 & = & 19-2-9= \\
 17-9 & = & 17-9= \\
 8 & & 8
 \end{array}$$

Statt die negativen Glieder einzeln der Reihe nach zu subtrahieren, kann man auch, wie aus der zweiten Art der

Berechnung leicht zu erkennen ist, deren Summe auf einmal subtrahieren, also:

$$12 + 5 - 6 - 2 + 7 + 1 - 9 =$$

$$(12 + 5 + 7 + 1) - (6 + 2 + 9) = 25 - 17 = 8, \text{ d. h.:}$$

Man erhält den Wert eines Aggregates, wenn man von der Summe der positiven Glieder subtrahiert die Summe der negativen Glieder.

3. Sollen in einem Aggregate einzelne Operationen vor anderen ausgeführt werden, so wird dies dadurch angezeigt, dass man die betreffenden Glieder in Klammern setzt; die in den Klammern enthaltenen Operationen sind dann auch zuerst auszuführen; z. B.

$$\begin{aligned} \text{a) } & 17 - (9 - 7) - 4 + (12 - 2) = \\ & 17 - 2 - 4 + 10 = 27 - 6 = \mathbf{21}. \\ \text{b) } & 13 - (21 - 5 + 9) + (3 - 11 + 25 - 2) - (-7 - 1 \\ & + 6 + 3) = \\ & 13 - (30 - 5) + (28 - 13) - (9 - 8) = \\ & 13 - 25 + 15 - 1 = 28 - 26 = \mathbf{2}. \\ \text{c) } & 12 - [23 - (16 - (8 - 5) + 4) - 2] + 7 = \\ & 12 - [23 - (16 - 3 + 4) - 2] + 7 = \\ & 12 - [23 - 17 - 2] + 7 = 12 - 4 + 7 = \mathbf{15}. \end{aligned}$$

4. Diese Klammern in einem Aggregate können auch weggelassen werden; nur müssen dann alle in einer Klammer vorkommenden Zeichen in die entgegengesetzten verwandelt werden, sobald vor der Klammer das Zeichen „minus“ steht, während die Klammern ohne Veränderung der Vorzeichen der einzelnen Glieder einfach wegfallen, wenn vor denselben das Zeichen „plus“ steht. Also:

$$\begin{aligned} & 12 - [23 - (16 - (8 - 5) + 4) - 2] + 7 = \\ & 12 - [23 - (16 - 8 + 5 + 4) - 2] + 7 = \\ & 12 - [23 - 16 + 8 - 5 - 4 - 2] + 7 = \\ & 12 - 23 + 16 - 8 + 5 + 4 + 2 + 7 = \\ & \quad \quad \quad 46 - 31 = \mathbf{15} \\ \text{oder: } & 12 - [23 - (16 - (8 - 5) + 4) - 2] + 7 = \\ & 12 - 23 + (16 - (8 - 5) + 4) + 2 + 7 = \\ & 12 - 23 + 16 - (8 - 5) + 4 + 2 + 7 = \\ & 12 - 23 + 16 - 8 + 5 + 4 + 2 + 7 = \\ & \quad \quad \quad 46 - 31 = \mathbf{15}. \end{aligned}$$

Bildung eines Zahlenausdruckes:

Um wie viel ist die Summe der Zahlen 13 u. 6 grösser als eine algebr. Summe aus 3 Gliedern. Das erste Glied dieser algebr. Summe ist die pos. Zahl 45; das zweite negat. Glied ist um 5 grösser als die Zahl 8; das dritte negat. Glied ist jene Zahl, welche angibt, um wie viel die Differenz der Zahlen 9 und 2 kleiner ist als die Summe der Zahlen 13 u. 17.

$$(13 + 6) - [45 - (8 + 5) - ((13 + 17) - (9 - 2))]$$

Erklärung dieses Zahlenausdruckes:

Der vorstehende Zahlenausdruck ist von der ersten Art, und zwar ist derselbe eine Differenz, deren Minuend die Summe der Zahlen 13

u. 6, während der Subtrahend (die eckige Klammer) ein Aggregat aus 3 Gliedern ist. Das erste Glied des Aggregates ist die pos. Zahl 45; das zweite Glied ist die neg. Summe der Zahlen 8 u. 5; das dritte neg. Glied endlich ist die Differenz aus der Summe der Zahlen 13 u. 17 einerseits, und der Differenz der Zahlen 9 und 2 andererseits.

Anwendung von Zahlenausdrücken der ersten Art.

§ 13.

- a) Subtrahiert man von einer Summe den einen Summanden, so erhält man den anderen Summanden; z. B.
 $(9 + 5) - 5 = 9$, denn $(9 + 5) - 5 = 14 - 5 = 9$ und
 $(9 + 5) - 9 = 5$, denn $(9 + 5) - 9 = 14 - 9 = 5$.
- b) Addiert man zu einer Differenz den Subtrahenden, so erhält man den Minuenden; z. B.
 $(17 - 8) + 8 = 17$, denn $(17 - 8) + 8 = 9 + 8 = 17$.
- c) Hieraus folgt: Eine Zahl ändert ihren Wert nicht, wenn man sie in beliebiger Reihenfolge um die nämliche Zahl vermehrt und zugleich vermindert; z. B.
 $8 = (8 + 5) - 5 = (8 - 3) + 3$.
- d) Der Wert einer Summe wird um so viele Einheiten grösser, so viele Einheiten man zu einem der Summanden addiert. Ist z. B. $3 + 7 = 10$, so ist
 $(3 + 5) + 7 = 8 + 7 = 15 = 10 + 5$, oder
 $3 + (7 + 5) = 3 + 12 = 15 = 10 + 5$.
- e) Der Wert einer Summe wird um so viele Einheiten kleiner, so viele Einheiten man von einem der Summanden subtrahiert. Ist z. B. $9 + 5 = 14$, so ist
 $(9 - 3) + 5 = 6 + 5 = 11 = 14 - 3$, oder
 $9 + (5 - 3) = 9 + 2 = 11 = 14 - 3$.
- f) Der Wert einer Differenz wird um so viele Einheiten grösser, so viele Einheiten man entweder zum Minuenden addiert, oder vom Subtrahenden subtrahiert. Ist z. B. $14 - 5 = 9$, so ist
 $(14 + 3) - 5 = 17 - 5 = 12 = 9 + 3$ und
 $14 - (5 - 3) = 14 - 2 = 12 = 9 + 3$.
- g) Der Wert einer Differenz wird um so viele Einheiten kleiner, so viele Einheiten man entweder vom Minuenden subtrahiert, oder zum Subtrahenden addiert. Ist z. B. $19 - 8 = 11$, so ist
 $(19 - 5) - 8 = 14 - 8 = 6 = 11 - 5$
 $19 - (8 + 5) = 19 - 13 = 6 = 11 - 5$.
- h) Eine Summe bleibt ihrem Werte nach unverändert, wenn man den einen Summanden um eine beliebige Zahl ver-

mehrt und den anderen Summanden um dieselbe Zahl vermindert. Ist z. B. $6 + 9 = 15$, so ist auch

$$(6 + 4) + (9 - 4) = 10 + 5 = 15 \text{ und}$$

$$(6 - 2) + (9 + 2) = 4 + 11 = 15.$$

- i) Eine Differenz bleibt ihrem Werte nach unverändert, wenn man sowohl zum Minuenden als zum Subtrahenden die nämliche Zahl addiert, oder auch von beiden zugleich die nämliche Zahl subtrahiert. Ist z. B.

$15 - 9 = 6$, so ist auch

$$(15 + 4) - (9 + 4) = 19 - 13 = 6 \text{ und}$$

$$(15 - 7) - (9 - 7) = 8 - 2 = 6.$$

Aufgaben.

1. Welche Zahl ist um 5379 grösser als die Zahl 9996?

Auflösung: $9996 + 5379 = (10000 - 4) + 5379 = (10000 + 5379) - 4 = 15379 - 4 = 15375.$

2. Welche Zahl ist um die Summe der Zahlen 547 und 795 kleiner als die Zahl 3795?

Aufl.: $3795 - (547 + 795) = 2453$. Man addiert die beiden Summanden in der Klammer und führt die Subtraktion zugleich dadurch aus, dass man die Differenz zum erhaltenen Subtrahenden addiert.)

Oder, da man eine Summe auch dadurch von einer Zahl subtrahieren kann, dass man in beliebiger Reihenfolge die einzelnen Summanden subtrahiert:

$$(3795 - 795) - 547 = 3000 - 547 = 2453.$$

3. Von vier Zahlen ist die erste 989, die dritte um 36 grösser, und die vierte um 54 kleiner als die erste, während die zweite die Differenz aus der dritten und ersten Zahl um 11 übertrifft; wie gross ist die Differenz aus der Summe der ersten und zweiten und aus der Differenz der dritten und vierten Zahl?

Aufl.: Die erste Zahl ist 989; die dritte Zahl ist $989 + 36 = 1025$; die vierte Zahl $989 - 54 = 935$; die zweite Zahl ist $(1025 - 989) + 11 = 36 + 11 = 47$; die gesuchte Zahl ist nun: $(989 + 47) - (1025 - 935) = 1036 - 90 = 946.$

Zahlenausdrücke der zweiten Art.

§ 14.

1. Ein Zahlenausdruck ist von der zweiten Art, wenn in demselben nur Operationen der zweiten Art, also Multiplikation und Division, vorkommen.

Ein solcher aus Faktoren (multiplikative Glieder) und Divisoren (divisive Glieder) bestehender Ausdruck heisst ein algebraisches Produkt; z. B. $3 \cdot 8 : 6 \cdot 7 : 2$.

2. Die Reihenfolge, nach welcher multipliziert und dividiert wird, ist für die Berechnung eines algebraischen Produktes gleichgültig. Es ist:

$$\begin{array}{rcl}
 3 \cdot 8 : 6 \cdot 7 : 2 = & \text{oder } 3 \cdot 8 \cdot 7 : 6 : 2 = \\
 24 : 6 \cdot 7 : 2 = & 24 \cdot 7 : 6 : 2 = \\
 4 \cdot 7 : 2 = & 168 : 6 : 2 = \\
 28 : 2 = & 28 : 2 = \\
 14 & 14
 \end{array}$$

Statt durch die Divisoren einzeln der Reihe nach zu dividieren, lässt sich auch, wie aus der zweiten Art leicht zu erkennen ist, durch das Produkt aller Divisoren auf einmal dividieren, nämlich:

$$3 \cdot 8 : 6 \cdot 7 : 2 = (3 \cdot 8 \cdot 7) : (6 \cdot 2) = 168 : 12 = 14, \text{ d. h.:}$$

Man erhält den Wert eines algebraischen Produktes, wenn man das Produkt aller Faktoren dividiert durch das Produkt aller Divisoren.

3. Sollen in einem algebraischen Produkte einzelne Operationen vor anderen ausgeführt werden, so ist dies durch Klammern anzuzeigen, die dann auch zuerst auszurechnen sind; z. B.

$$\begin{aligned}
 45 : [(30 : (6 : 3)) : 5 \cdot (24 : (4 \cdot 2))] &= \\
 45 : [(30 : 2) : 5 \cdot (24 : 8)] &= 45 : [15 : 5 \cdot 3] = \\
 45 : [3 \cdot 3] &= 45 : 9 = 5
 \end{aligned}$$

Erklärung des Zahlenausdruckes:

Der gegebene Zahlenausdruck ist von der zweiten Art, und zwar ist derselbe ein Quotient, dessen Dividend die Zahl 45 und dessen Divisor (die eckige Klammer) ein algebraisches Produkt aus drei Gliedern ist. Das erste multiplikative Glied ist ein Quotient aus der Zahl 30 und aus dem Quotienten der Zahlen 6 und 3, das zweite Glied ist der Divisor 5; das dritte multiplikative Glied endlich ist der Quotient aus der Zahl 24 und aus dem Produkte der Zahlen 4 und 2.

Anwendung von Zahlenausdrücken der zweiten Art.

§ 15.

- a) Dividiert man ein Produkt durch den einen Faktor, so erhält man den anderen Faktor; z. B.

$$(7 \cdot 9) : 7 = 63 : 7 = 9 \text{ und}$$

$$(7 \cdot 9) : 9 = 63 : 9 = 7.$$

- b) Aus der Erklärung der Division ergab sich:

Der Quotient multipliziert mit dem Divisor gibt den Dividenten; es ist z. B.

$$(21 : 7) \cdot 7 = 3 \cdot 7 = 21.$$

- c) Der Wert eines Produktes wird sovielmals grösser, sovielmals man einen Faktor grösser macht. Ist z. B.

$$5 \cdot 7 = 35, \text{ so ist}$$

$$(5 \cdot 2) \cdot 7 = 10 \cdot 7 = 70 = 35 \cdot 2, \text{ oder}$$

$$5 \cdot (7 \cdot 2) = 5 \cdot 14 = 70 = 35 \cdot 2.$$

- d) Der Wert eines Produktes wird sovielmal kleiner, sovielmal man einen Faktor kleiner macht. Ist z. B. $12 \cdot 8 = 96$, so ist

$$(12 : 4) \cdot 8 = 3 \cdot 8 = 24 = 96 : 4, \text{ oder} \\ 12 \cdot (8 : 4) = 12 \cdot 2 = 24 = 96 : 4.$$

- e) Der Wert eines Quotienten wird sovielmal grösser, sovielmal man den Dividenden grösser, oder den Divisor kleiner macht. Ist z. B. $18 : 6 = 3$, so ist

$$(18 \cdot 2) : 6 = 36 : 6 = 6 = 3 \cdot 2 \text{ und} \\ 18 : (6 : 2) = 18 : 3 = 6 = 3 \cdot 2.$$

- f) Der Wert eines Quotienten wird sovielmal kleiner, sovielmal man den Dividenden kleiner, oder den Divisor grösser macht. Ist z. B. $24 : 3 = 8$, so ist

$$(24 : 2) : 3 = 12 : 3 = 4 = 8 : 2, \text{ und} \\ 24 : (3 \cdot 2) = 24 : 6 = 4 = 8 : 2.$$

- g) Der Wert eines Produktes bleibt unverändert, wenn man den einen Faktor mit einer beliebigen Zahl multipliziert und den anderen Faktor durch die nämliche Zahl dividiert. Ist z. B. $6 \cdot 8 = 48$, so ist auch

$$(6 \cdot 4) \cdot (8 : 4) = 24 \cdot 2 = 48, \text{ und} \\ (6 : 2) \cdot (8 \cdot 2) = 3 \cdot 16 = 48.$$

- h) Der Wert eines Quotienten bleibt unverändert, wenn man sowohl seinen Dividenden als auch seinen Divisor mit der nämlichen Zahl multipliziert, oder auch durch die nämliche Zahl dividiert. Ist z. B. $24 : 6 = 4$, so ist auch

$$(24 \cdot 2) : (6 \cdot 2) = 48 : 12 = 4, \text{ und} \\ (24 : 3) : (6 : 3) = 8 : 2 = 4.$$

- i) Eine Zahl wird mit einem Produkte multipliziert, indem man die Zahl mit einem der Faktoren multipliziert, und das erhaltene Produkt sodann mit dem anderen Faktor multipliziert; z. B.

$$7 \cdot (5 \cdot 3) = (7 \cdot 5) \cdot 3 = (7 \cdot 3) \cdot 5; \text{ denn} \\ 7 \cdot (5 \cdot 3) = 7 \cdot 15 = 105 \\ (7 \cdot 5) \cdot 3 = 35 \cdot 3 = 105 \\ (7 \cdot 3) \cdot 5 = 21 \cdot 5 = 105.$$

Mit Vorteil kann dies benützt werden, wenn zwei Zahlen mit einander zu multiplizieren sind, von denen sich die eine in einfache Faktoren zerlegen lässt; z. B.

$$548 \cdot 63 = 548 \cdot (9 \cdot 7) = (548 \cdot 9) \cdot 7 = 4932 \cdot 7 = 34524.$$

- k) Eine Zahl wird durch ein Produkt dividiert, indem man die Zahl zuerst durch einen Faktor dividiert und den erhaltenen Quotienten durch den anderen Faktor; z. B.

$$72 : (3 \cdot 4) = (72 : 3) : 4 = (72 : 4) : 3, \text{ denn}$$

$$72 : (3 \cdot 4) = 72 : 12 = 6,$$

$$(72 : 3) : 4 = 24 : 4 = 6,$$

$$(72 : 4) : 3 = 18 : 3 = 6.$$

Auch dies kann mit Vorteil benützt werden, wenn eine Zahl durch eine andere zu dividieren ist, und diese letztere sich in einfache Faktoren zerlegen lässt, z. B.

$$19512 : 72 = 19512 : (8 \cdot 9) = (19512 : 8) : 9 = 2439 : 9 = 271.$$

- l) Eine Zahl wird mit einem Quotienten multipliziert, indem man die Zahl mit dem Dividenten multipliziert und das erhaltene Produkt durch den Divisor dividiert, oder indem man die Zahl durch den Divisor dividiert und den erhaltenen Quotienten mit dem Dividenten multipliziert; z. B.

$$12 \cdot (15 : 3) = (12 \cdot 15) : 3 = (12 : 3) \cdot 15; \text{ denn}$$

$$12 \cdot (15 : 3) = 12 \cdot 5 = 60,$$

$$(12 \cdot 15) : 3 = 180 : 3 = 60,$$

$$(12 : 3) \cdot 15 = 4 \cdot 15 = 60.$$

Hierauf gründet sich eine einfache Ausführung der **Multiplikation einer Zahl mit 25** $= 100 : 4$, **125** $= 1000 : 8$, **625** $= 10000 : 16$. Um nämlich eine Zahl mit 25 zu multiplizieren, multipliziert man dieselbe mit 100 und dividiert das Produkt durch 4; um eine Zahl mit 125 zu multiplizieren, multipliziert man dieselbe mit 1000 und dividiert das Produkt durch 8 u. s. w., wobei schliesslich die Multiplikation mit 100, 1000 u. s. f. leicht im Kopfe ausgeführt werden kann; z. B.

$$637 \cdot 25 = 637 \cdot (100 : 4) = (637 \cdot 100) : 4 = 63700 : 4 = 15925;$$

$$125 \cdot 534 = 534 \cdot (1000 : 8) = 534000 : 8 = 66750;$$

$$\text{Kurz: } 762^{00} \cdot 25 = 19050; 125 \cdot 896^{000} = 112000.$$

- m) Eine Zahl wird durch einen Quotienten dividiert, indem man die Zahl durch den Dividenten dividiert und den erhaltenen Quotienten mit dem Divisor multipliziert, oder indem man die Zahl mit dem Divisor multipliziert und das erhaltene Produkt durch den Dividenten dividiert; z. B.

$$\begin{aligned} 36 : (12 : 4) &= (36 : 12) \cdot 4 = (36 \cdot 4) : 12; \text{ denn} \\ 36 : (12 : 4) &= 36 : 3 = 12, \\ (36 : 12) \cdot 4 &= 3 \cdot 4 = 12, \\ (36 \cdot 4) : 12 &= 144 : 12 = 12. \end{aligned}$$

Hierauf gründet sich eine einfache Ausführung der **Division einer Zahl durch 25** $= 100 : 4$, **125** $= 1000 : 8$ u. s. f.

Man dividiert nämlich eine Zahl durch 25, indem man die Zahl mit 4 multipliziert und das erhaltene Produkt durch 100 dividiert; ähnlich mit 125 u. s. w.; z. B.

$$6175 : 25 = 6175 : (100 : 4) = (6175 \cdot 4) : 100 = 24700 : 100 = 247.$$

$30275 : 125 = 30275 : (1000 : 8) = 242200 : 1000$. Die Ausführung dieser Division ergibt nun den unvollständigen Quotienten 242 mit dem Reste 200; dieser Rest 200 entspricht aber dem Divisor 1000, und es ist folglich der wirkliche Rest, welcher dem Divisor 125 entspricht, nur $200 : 8 = 25$.

$$\text{Kurz: } 39215 : 25 = 1568|60; \quad 39184 : 125 = 313|472.$$

15 Rest

59 Rest.

Aufgaben.

1. Wie oft muss man das Produkt der Zahlen 109 und 125 als Summanden setzen, um die Zahl 81750 zu erhalten? Lösung: $81750 : (109 \cdot 125) = (81750 : 125) : 109 = 654 : 109 = 6$.

654(000)

2. Wie vielmal ist der Quotient aus dem 5fachen der Zahl 72 und dem 7ten Teile der Zahl 63 kleiner als das Produkt aus der Zahl 8 und derjenigen Zahl, welche man mit 7 multiplizieren muss, um die Zahl 105 als Produkt zu erhalten?

$$\text{Lös.: } (8 \cdot (105 : 7)) : ((72 \cdot 5) : (63 : 7)) = 3.$$

Zahlenausdrücke gemischter Art.

§ 16.

Bei Zahlenausdrücken gemischter Art, in denen alle vier Species vorkommen können, ist die Reihenfolge der Operationen nicht gleichgültig. Für solche hat man festgesetzt, dass immer die Operationen der zweiten Art, also Multiplikation und Division, den Vorrang vor den Operationen der ersten Art, also der Addition und Subtraktion, haben sollen.

Will man aber doch einer Operation der ersten Art den Vorrang vor einer Operation der zweiten Art geben, so muss dies durch Klammern angedeutet werden; z. B.

$$\begin{aligned} \text{a) } 24 + 3 \cdot 7 &= 24 + 21 = 45 & \text{ dagegen: } (24 + 3) \cdot 7 &= 27 \cdot 7 = 189. \\ \text{b) } 4 \cdot 12 - 8 &= 48 - 8 = 40 & \text{ „ } 4 \cdot (12 - 8) &= 4 \cdot 4 = 16. \\ \text{c) } 42 - 24 : 6 &= 42 - 4 = 38 & \text{ „ } (42 - 24) : 6 &= 18 : 6 = 3. \\ \text{d) } 35 : 5 + 2 &= 7 + 2 = 9 & \text{ „ } 35 : (5 + 2) &= 35 : 7 = 5. \end{aligned}$$

- e) $6 \cdot 20 - 12 : 4 = 120 - 3 = 117.$
 $(6 \cdot 20 - 12) : 4 = (120 - 12) : 4 = 108 : 4 = 27.$
 $6 \cdot (20 - 12 : 4) = 6 \cdot (20 - 3) = 6 \cdot 17 = 102.$
 $6 \cdot (20 - 12) : 4 = 6 \cdot 8 : 4 = 48 : 4 = 12.$
f) $(17 + 12 : 4) : [7 - (11 + 31) : (11 - 9) + 3 \cdot (19 - 39 : 3)] + 5$
 $= (17 + 3) : [7 - 42 : 2 + 3 \cdot (19 - 13)] + 5$
 $= 20 : [7 - 21 + 3 \cdot 6] + 5 = 20 : [7 - 21 + 18] + 5$
 $= 20 : 4 + 5 = 5 + 5 = 10.$

Erklärung des Zahlenausdruckes f):

Der gegebene Zahlenausdruck ist die Summe aus einem Quotienten und aus der Zahl 5. Der Dividend des Quotienten ist eine Summe aus der Zahl 17 und aus dem Quotienten der Zahlen 12 und 4, während der Divisor (die eckige Klammer) eine algebr. Summe aus 3 Gliedern ist. Das erste Glied ist die positive Zahl 7; das zweite Glied ist der negative Quotient aus der Summe der Zahlen 11 und 31 einerseits und aus der Differenz der Zahlen 11 und 9 andererseits; das dritte positive Glied endlich ist ein Produkt aus der Zahl 3 und aus einer Differenz mit der Zahl 19 als Minuenden und dem Quotienten der Zahlen 39 und 3 als Subtrahenden.

Anwendung von Zahlenausdrücken gemischter Art.

§ 17.

- a) Eine Summe wird mit einer Zahl multipliziert, indem man jeden Summanden mit der Zahl multipliziert und die erhaltenen Produkte addiert; z. B.

$$(8 + 3) \cdot 4 = 8 \cdot 4 + 3 \cdot 4.$$

Beweis: $(8 + 3) \cdot 4 = (8 + 3) + (8 + 3) + (8 + 3) + (8 + 3)$; der Faktor $(8 + 3)$ ist nach der Erklärung der Multiplikation viermal als Summand gesetzt; nun ist aber die erhaltene Summe gleich $(8 + 8 + 8 + 8) + (3 + 3 + 3 + 3)$, da die Reihenfolge der Summanden gleichgültig. Jede einzelne Summe in den Klammern, aus gleichen Summanden bestehend, ist aber wieder ein Produkt, also die erhaltene Summe gleich $(8 \cdot 4) + (3 \cdot 4) = 8 \cdot 4 + 3 \cdot 4.$

Die Richtigkeit erweist sich auch durch:

$$(8 + 3) \cdot 4 = 11 \cdot 4 = 44 \text{ und } 8 \cdot 4 + 3 \cdot 4 = 32 + 12 = 44.$$

- b) Eine Differenz wird mit einer Zahl multipliziert, indem man sowohl Minuenden als auch Subtrahenden mit der Zahl multipliziert, und letzteres Produkt von ersterem subtrahiert; z. B.

$$(9 - 3) \cdot 5 = 9 \cdot 5 - 3 \cdot 5, \text{ denn}$$

$$(9 - 3) \cdot 5 = (9 - 3) + (9 - 3) + (9 - 3) + (9 - 3) + (9 - 3)$$

$$= (9 + 9 + 9 + 9 + 9) - (3 + 3 + 3 + 3 + 3)$$

$$= 9 \cdot 5 - 3 \cdot 5.$$

- c) Ein Produkt wird mit einer Zahl multipliziert, indem man einen Faktor mit der Zahl multipliziert und

sodann das erhaltene Produkt und den anderen Faktor mit einander multipliziert; z. B.

$$(5 \cdot 3) \cdot 4 = (5 \cdot 4) \cdot 3 = 5 \cdot (3 \cdot 4).$$

Beweis: $(5 \cdot 3) \cdot 4 = (5 + 5 + 5) \cdot 4 = 5 \cdot 4 + 5 \cdot 4 + 5 \cdot 4 = (5 \cdot 4) \cdot 3$;
 ferner: $(5 \cdot 3) \cdot 4 = 5 \cdot 3 + 5 \cdot 3 + 5 \cdot 3 + 5 \cdot 3 = 5 \cdot (3 + 3 + 3 + 3)$
 $= 5 \cdot (3 \cdot 4).$

- d) Ein Quotient wird mit einer Zahl multipliziert, indem man entweder den Dividenten mit der Zahl multipliziert und das erhaltene Produkt durch den Divisor dividiert, oder indem man den Divisor durch die Zahl dividiert, und durch den erhaltenen Quotienten den Dividenten dividiert; z. B.

$$(24 : 6) \cdot 3 = (24 \cdot 3) : 6 = 24 : (6 : 3).$$

Beweis: $(24 : 6) \cdot 3 = 24 : 6 + 24 : 6 + 24 : 6 = (24 + 24 + 24) : 6 =$
 $(24 \cdot 3) : 6.$ Dividiert man jetzt Divident und Divisor durch dieselbe Zahl 3, so erhält man $((24 : 3) : 3) : (6 : 3) = 24 : (6 : 3).$

- e) Eine Summe wird durch eine Zahl dividiert, indem man jeden Summanden durch die Zahl dividiert und die erhaltenen Quotienten addiert; z. B.

$$(21 + 15) : 3 = 21 : 3 + 15 : 3; \text{ denn}$$

$(21 + 15) : 3 = 36 : 3 = 12$ und $21 : 3 + 15 : 3 = 7 + 5 = 12$; oder
 $(21 + 15) : 3 = ((21 : 3) \cdot 3 + (15 : 3) \cdot 3) : 3 = ((21 : 3 + 15 : 3) \cdot 3) : 3 = 21 : 3 + 15 : 3.$

- f) Eine Differenz wird durch eine Zahl dividiert, indem man sowohl den Minuenden, als auch den Subtrahenden durch die Zahl dividiert, und letzteren Quotienten von ersterem subtrahiert; z. B.

$$(20 - 12) : 4 = 20 : 4 - 12 : 4; \text{ denn}$$

$(20 - 12) : 4 = 8 : 4 = 2$; und $20 : 4 - 12 : 4 = 5 - 3 = 2.$

- g) Ein Produkt wird durch eine Zahl dividiert, indem man einen Faktor durch die Zahl dividiert, und sodann den erhaltenen Quotienten und den anderen Faktor mit einander multipliziert; z. B.

$$(4 \cdot 6) : 2 = (4 : 2) \cdot 6 = 4 \cdot (6 : 2).$$

Beweis: $(4 \cdot 6) : 2 = (4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4) : 2 = 4 : 2 + 4 : 2 + 4 : 2 + 4 : 2 + 4 : 2 + 4 : 2 = (4 : 2) \cdot 6$;
 ferner ist $(4 : 2) \cdot 6 = ((4 : 2) \cdot 2) \cdot (6 : 2) = 4 \cdot (6 : 2).$

- h) Ein Quotient wird durch eine Zahl dividiert, indem man entweder den Dividenten durch die Zahl dividiert und den erhaltenen Quotienten durch den Divisor, oder indem man den Divisor mit der Zahl multipliziert und den Dividenten durch das erhaltene Produkt dividiert; z. B.

$$(24 : 6) : 2 = (24 : 2) : 6 = 24 : (6 \cdot 2).$$

Beweis: $(24 : 6) : 2 = ((24 : 6) \cdot 6) : (2 \cdot 6) = 24 : (2 \cdot 6) = 24 : (6 \cdot 2)$;
 ferner: $24 : (6 \cdot 2) = (24 : 2) : ((6 \cdot 2) : 2) = (24 : 2) : 6.$

- i) Ein Produkt wird durch ein Produkt dividiert, indem man je einen Faktor des einen Produktes durch einen Faktor des anderen Produktes dividiert und die erhaltenen Quotienten mit einander multipliziert; z. B.

$$\frac{24 \cdot 35}{7 \cdot 6} = \frac{24}{6} \cdot \frac{35}{7} = 4 \cdot 5 = 20$$

Beweis: $\frac{24 \cdot 35}{7 \cdot 6} = \frac{(24 \cdot 35) : 6}{(7 \cdot 6) : 6} = \frac{(24 : 6) \cdot 35}{7} = (24 : 6) \cdot (35 : 7) = \frac{24}{6} \cdot \frac{35}{7}$

Soll ein Produkt durch ein Produkt dividiert werden, so lässt sich die Ausführung dieser Aufgabe wesentlich vereinfachen, wenn man bemerkt, dass der Wert eines Quotienten unverändert bleibt, sobald man Dividenden und Divisor desselben durch die nämliche Zahl dividiert. Da aber Dividend und Divisor in diesem Falle Produkte sind, so ist diese Division durch die nämliche Zahl immer nur an einem der Faktoren des Dividenden und des Divisors vorzunehmen. Man wählt also zur Division solche Zahlen (möglichst grosse) aus, welche sowohl im Dividenden als im Divisor als Faktoren enthalten sind. Der Einfachheit halber bedient man sich dabei statt des Doppelpunktes eines wagrechten Striches als Divisionszeichen.

$$\begin{aligned} (12 \cdot 7 \cdot 15 \cdot 32) : (7 \cdot 20 \cdot 9) &= \frac{(12 \cdot 7 \cdot 15 \cdot 32) : 7}{(7 \cdot 20 \cdot 9) : 7} \\ &= \frac{12 \cdot 15 \cdot 32}{20 \cdot 9} = \frac{(12 \cdot 15 \cdot 32) : 4}{(20 \cdot 9) : 4} = \frac{3 \cdot 15 \cdot 32}{5 \cdot 9} \\ &= \frac{(3 \cdot 15 \cdot 32) : 3}{(5 \cdot 9) : 3} = \frac{15 \cdot 32}{5 \cdot 3} = \frac{15 \cdot 32}{15} = 32 \end{aligned}$$

$$\text{Kurz: } \frac{\overset{3}{12} \cdot 7 \cdot \overset{3}{15} \cdot 32}{\underset{5}{7} \cdot 20 \cdot \underset{3}{9}} = 32$$

Rechnungsabkürzungen.

§ 18.

Auf einzelne dieser Sätze gründen sich einige Rechnungsabkürzungen, wie folgt:

- a) Es ist $7805 \cdot 11 = 7805 \cdot (1 + 10) = 7805 + 78050$
 $= 7805$ Man sieht, dass hier lediglich zwei auf einander
 $+ 7805$ folgende Ziffern der gegebenen Zahl addiert werden,
 $\underline{85855}$ während die Einerstelle und die höchste Stelle der
 gegebenen Zahl auch die Einerstelle und die höchste
 Stelle des Produktes werden.

Rechne also:

$$964087 \cdot 11 = 10604957$$

Die vor dem vertikalen Striche stehenden Ziffern bilden der Reihe nach die Ziffern des Produktes.

		7 ist	7
	7 u. 8	„	15
1 u. 8 ist	9 u. 0	„	9
	0 u. 4	„	4
	4 u. 6	„	10
1 u. 6 ist	7 u. 9	„	16
	1 u. 9	„	10

- b) Ist in einem Produkte einer der Faktoren 111, 1111, 101, 1001, so lässt sich der Wert des Produktes ebenfalls sogleich niederschreiben; z. B.

$$74805 \cdot 111 = \underline{8303355}; \quad 101 \cdot 36549 = \underline{3691449}$$

Rechne:

		5 und 0 ist	5			9
	5 u. 0 ist	5 u. 8	„	13		4
1 u. 0 ist	1 u. 8	„	9 u. 4	„	13	9 u. 5 ist 14
1 u. 8	„	9 u. 4	„	13 u. 7	„	20
	2 u. 4	„	6 u. 7	„	13	1 u. 4 ist 5 u. 6 „ 11
		1 u. 7	„	8		1 u. 5 „ 6 u. 3 „ 9
						6
						3

- c) Es ist $5038 \cdot 99 = 5038 \cdot (100 - 1) = 503800 - 5038$
 $\underline{498762}$ Man denkt sich einfach die gegebene Zahl mit 100 multipliziert und subtrahiert hievon die Zahl selbst durch Hinzufügung des bleibenden Restes.

Aehnlich verfährt man bei der Multiplikation mit 999
 $= (1000 - 1)$, $9999 = (10000 - 1)$ u. s. f. Also:

$$670382 \cdot 999 = \underline{669711618}.$$

Rechne:	2 u.	8	ist	10
1 u.	8	ist	9 u.	1
1 u.	3	„	4 u.	6
1 u.	0	„	1 u.	1
			7 u.	1
			6 u.	7
			1 u.	9
			1 u.	6
			6	

- d) Ebenso kann man verfahren, wenn der eine Faktor an allen Stellen mit Ausnahme der niedrigsten die Ziffer 9 hat; z. B.

$$52086 \cdot 94 = 52086 \cdot (100 - 6) = 5208600 - 312516$$

$$\underline{4896084}$$

$$\text{Kurz: } 52086 \cdot 94 = 4896084.$$

Rechne:	6 mal 6 ist 36 u. 4	ist 40
6 mal 8 ist 48 u. 4	„ 52 u. 8	„ 60
6 mal 0 „ 0 u. 6	„ 6 u. 0	„ 6
6 mal 2 „ 12 u. 6	„ 18	
6 mal 5 „ 30 u. 1	„ 31 u. 9	„ 40
	4 u. 8	„ 12
	1 u. 4	„ 5

Um Fehler zu vermeiden, kann man sich die Stellen, von denen subtrahiert worden ist, durch darüber gesetzte Punkte bezeichnen.

Aufgaben.

1. Welche Zahl ist um den 69. Teil der Zahl 48645 grösser als die um das Produkt der Zahlen 749 und 12 verminderte Zahl 8339?
 $(8339 - 749 \cdot 12) + 48645 : 69 = 56.$
2. Welche Zahl übertrifft das Produkt aus der Differenz der Zahlen 8339 und 749 und aus der Zahl 12 um eben so viel, als der Quotient aus den Zahlen 48645 und 69 beträgt?
 $(8339 - 749) \cdot 12 + 48645 : 69 = 91785.$
3. Wie gross ist das Produkt aus der Differenz der Zahlen 8339 und 749 einerseits und der um den Quotienten aus den Zahlen 48645 und 69 vermehrten Zahl 12 andererseits?
 $(8339 - 749) \cdot (12 + 48645 : 69) = 5442030.$
4. Wie gross ist der 69. Teil derjenigen Zahl, welche das 12 fache der Differenz der Zahlen 8339 und 749 um 48645 übertrifft?
 $[(8339 - 749) \cdot 12 + 48645] : 69 = 2025.$
5. Welche Zahl ist 69 mal kleiner als das Produkt aus der Differenz der Zahlen 8339 und 749 einerseits und der Summe der Zahlen 12 und 48645 andererseits?
 $((8339 - 749) \cdot (12 + 48645)) : 69 = 5352270.$

Potenz.

§ 19.

Eine Zahl mit einer zweiten Zahl potenzieren heisst die erstere so oft als Faktor setzen, als die zweite Einheiten enthält.

Eine Potenz ist demnach ein Produkt aus lauter gleichen Faktoren. Der gleiche Faktor heisst Grundzahl oder Basis, und die Anzahl der gleichen Faktoren heisst Exponent. Die Zahl, welche man erhält, wenn man alle gleichen Faktoren wirklich mit einander multipliziert, also das Resultat der Potenz, heisst der Potenzwert.

Statt des Produktes aus gleichen Faktoren schreibt man

kürzer allein die Grundzahl an und setzt rechts oberhalb derselben mit etwas kleinerer Ziffer den Exponenten; z. B.

$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^5 = 32$ (ausgesprochen: 2 hoch 5, oder 2 zur fünften Potenz ist gleich 32). Die Zahl 2 ist hier die Grundzahl, 5 der Exponent, (also die Zahl, welche angibt, wie oft der gleiche Faktor vorhanden ist), und 32 ist der Potenzwert.

Grundzahl und Exponent einer Potenz können nicht ohne Wertveränderung der Potenz mit einander vertauscht werden; z. B.

$$2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8; \text{ aber } 3^2 = 3 \cdot 3 = 9$$

$$2^5 = 32; \text{ aber } 5^2 = 25. \text{ Nur } 2^4 = 4^2 = 16.$$

Da $5^1 = 5$, so lässt sich jede Zahl als Potenz betrachten, deren Exponent 1 ist; oder es kann der Exponent 1 beliebig gesetzt und weggelassen werden: $11 = 11^1$.

Ist eine Zahl bloss zweimal als Faktor gesetzt, so nennt man dieses Produkt das Quadrat, und wenn sie dreimal als Faktor gesetzt ist, den Kubus der Zahl; z. B.

$$6 \cdot 6 = 6^2 = 36 \text{ (6 zum Quadrat ist gleich 36).}$$

$$6 \cdot 6 \cdot 6 = 6^3 = 216 \text{ (6 zum Kubus ist gleich 216).}$$

II. Benannte Zahlen.

Erklärungen.

§ 20.

Eine Zahl heisst benannt, wenn die Art ihrer Einheiten angegeben ist. Solche Arten von Einheiten sind in bezug auf:

1. die blosse Anzahl der Dinge: Stück (Eier), Dutzend (Messer), Ballen (Papier) u. s. w.;
2. die räumliche Ausdehnung und zwar:
 - a) die Länge: Meter, Fuss, Yard, Meile . . .
 - b) die Fläche: Quadratmeter, Ar, Tagwerk . . .
 - c) den körperlichen Inhalt: Kubikmeter, Liter, Ster . . .
3. das Gewicht: Zentner, Kilogramm, Pfund . . .
4. den Preis (Wert): Mark, Krone, Thaler, Gulden . . .
5. die Zeit: Jahr, Monat, Tag, Stunde . . .
6. den Winkel oder Bogen: Grad, Minute, Sekunde.

Sind bei zwei Zahlen die Einheiten von derselben Art, so heissen sie gleichartig, und zwar gleichartig gleichnamig, wenn ihre Einheiten dieselbe Benennung haben, z. B. 7 Mark und 5 Mark; dagegen gleichartig ungleichnamig, wenn ihre Einheiten von derselben Art lediglich sich

durch ihre Grösse unterscheiden und verschiedene Benennungen haben, z. B. 5 Meter und 3 Fuss.

Sind die Einheiten der Zahlen nicht von derselben Art, so heissen diese ungleichartig, z. B. 4 Mark und 6 Liter.

Für Gegenstände derselben Art unterscheidet man sehr häufig grössere und kleinere Einheiten, so dass immer eine bestimmte Anzahl kleinerer Einheiten eine grössere Einheit gibt. Es erhalten diese dann verschiedene Benennungen und man heisst sie Einheiten höherer und niederer Ordnung, z. B. Krone, Mark, Pfennige; 10 Mark geben 1 Krone, 100 Pfennige geben 1 Mark. In bezug auf Mark sind daher Kronen Einheiten höherer Ordnung, Pfennige Einheiten niederer Ordnung.

Statt der benannten Zahl 127 Pfennige könnte man auch sagen 100 Pfennige und 27 Pfennige, oder, da 100 Pfennige soviel wie 1 Mark sind, auch 1 Mark und 27 Pfennige. Es drücken also 127 Pfennige denselben Wert aus wie 1 Mark 27 Pfennige, und man unterscheidet deshalb einfach benannte Zahlen, wenn eine Zahl nur durch eine Benennung dargestellt ist, dagegen mehrfach benannte Zahlen, wenn zum Ausdruck einer Zahl mehrere Benennungen verwendet sind.

Begriff der Reduktion.

§ 21.

Das Verwandeln von Einheiten höherer Ordnung in Einheiten niederer Ordnung, sowie umgekehrt das Verwandeln von Einheiten niederer Ordnung in Einheiten höherer Ordnung heisst **reduzieren**.

Zur Vornahme einer Reduktion ist die Kenntnis derjenigen Zahl notwendig, welche angibt, wie viele Einheiten einer niederen Ordnung auf **eine** Einheit der nächst höheren Ordnung gehen; dieselbe wird Reduktionszahl genannt. So ist z. B. für die Einheiten Mark und Pfennige die Reduktionszahl 100; für Tag und Stunden ist die Reduktionszahl 24, u. s. f.

Reduktionszahlen.

§ 22.

1. Stückmasse.

1 Schock = 60 Stück.

1 Gross = 12 Dutzend.

1 Mandel = 15 Stück.

1 Dutzend = 12 Stück.

Papiermass, neues: 1 Ballen = 10 Riess; 1 Riess = 10 Buch;
1 Buch = 10 Hefte; 1 Heft = 10 Bogen.

Papiermass, altes: 1 Ballen = 10 Riess,
1 Riess = 20 Buch,
1 Buch = 24 Bogen geleimt (Schreibpap.),
1 Buch = 25 Bogen ungel. (Druckpap.)

2. Längen-, Flächen- und Körpermasse.

In ganz Deutschland, sowie in Frankreich, Italien, Belgien, Holland, der Schweiz, Griechenland, Spanien und Oesterreich gilt das metrische Mass- und Gewichtssystem. (Siehe § 23.)

Bayern. Alte Masse:

1 Fuss (1') = 12 Zoll (12''); 1'' = 12 Linien (''');
1 Tagwerk (Morgen) = 100 Dezimalen à 400 Quadratfuss.
1 Kubikfuss (C') = 1728 C''; 1 C'' = 1728 C'''.
1 Schäffel = 6 Metzen. 1 Eimer = 64 Mass.

England: 1 Yard (Yd) = 3' à 12''. 1 engl. Meile = 5000'.

Russland: 1 Werst = 500 Faden à 7 Fuss à 12'' à 10'''.

3. Das Gewicht.

Bayern Altes Gewicht:

1 Zentner = 100 Pfund (℔) à 32 Lot à 4 Quint
1 Zoll-Ztr. = 100 Zoll-℔; 112 Zoll-℔ = 100 bayer. ℔.

Das Gewicht einer Ware samt der Verpackung (emballage) nennt man das Bruttogewicht der Ware, das Gewicht derselben ohne Verpackung heisst Nettogewicht, und endlich das Gewicht der Verpackung Tara

Bruttogew. = Nettogew. + Tara,
also Nettogew. = Bruttogew. — Tara,
Tara = Bruttogew. — Nettogew.

4. Das Wertmass (Geld).

Als Werteinheit dient eine bestimmte Gewichtsmenge Silber oder Gold, weshalb man Silber- oder Goldwährung unterscheidet. Solche Währungen sind:

1. Die deutsche Reichswährung (R.-W.) Einheit ist 1 Kilogramm Feingold = 2790 Mark (ℳ). 1 ℳ = 100 Pfennige (℔); 10 ℳ = 1 Krone; 20 ℳ = 1 Doppelkrone.
2. Die auf der Münzkonvention von 1857 beruhenden Münzsysteme, bei welchen als Einheit das ℔ Feinsilber dient:
 - a) Die süddeutsche Währung (s. W.): 1 ℔ Feinsilber = 52½ Gulden (fl.) — 52½ fl.-Fuss.
1 fl = 60 Kreuzer (kr.); 1 kr. = 4 Pfennige (dl.)

- b) Die norddeutsche Währung (n. W.): 1 $\overline{\text{a}}$ Feinsilber = 30 Thaler (Thlr.) — 30 Thlr.-Fuss.
 1 Thlr. = 30 Silbergroschen (sgr.); 1 sgr. = 12 Pfennige. In Sachsen galt 1 Thlr. = 30 Neugroschen (ngr.); 1 ngr. = 10 Pf.
- c) Die österreichische Währung (ö. W.): 1 $\overline{\text{a}}$ Feinsilber = 45 Gulden (fl.) — 45 fl.-Fuss.
 1 fl. = 100 Neukreuzer (nkr.)
3. Die französische Währung. Einheit: der Franc (1 fr.) = 100 centimes (cs.)
 In der Schweiz ist 1 fr. = 100 Rappen.
4. Die englische Währung. Einheit: das Pfund Sterling (£). 1 £ = 20 Schillinge (sh.); 1 sh. = 12 pence (d.) [1 £ = 1 Sovereign = 20 M.]
5. Russische Währung. Einheit: der Silberrubel (R^{r} S.) = 100 Kopeken (Kop.) [1 Rubel = 3 M 20 a ca.]
6. Amerikanische Währung. Einheit: der Dollar (\$) = 100 cents (cs.) [1 \$ = 4 M 25 a ca.]
7. Italienische Währung. Einheit: 1 Lira (£) = 100 centesimi (cs.) [1 £ = 1 fr. = 80 a R.-W.]

Anmerkung: Die Währungen 2. a) bis c) sind nicht mehr im Gebrauch. Die neue österr.-ungar. Goldwährung hat zur Einheit die Krone. 1 Krone = 100 Heller. [1 Kr. österr. = 85 a R.-W.]

Für 1. u. 2. u. 3. beachte:

12 M = 7 fl. (s. W.) = 4 Thlr. = 6 fl. (ö. W.) = 15 frs.
 1 M = 35 kr. = 10 sgr. = 120 centimes = 57 bis 61 nkr.
 1 fl. (ö. W.) = 1 M 60 a bis 1 M 75 a (nach dem jeweiligen Kurs).

5. Das Zeitmass.

Die Zeit wird nach den Bewegungen der Erde gemessen. Da die Erde eine zweifache Bewegung hat, so sind auch zwei Zeiteinheiten zu unterscheiden:

1. Die Zeit, welche die Erde braucht, um sich einmal um ihre Achse zu drehen, heisst Tag (1^{d}), gerechnet von einer Mitternacht zur andern:

1^{d} = 24 Stunden ($^{\text{h}}$); 1^{h} = 60 Minuten ($^{\text{'}}$); $1^{\text{'}}$ = 60 Sekunden ($60''$). 7 Tage geben 1 Woche.

2. Die Zeit, welche die Erde braucht, um ihren Umlauf um die Sonne zu vollenden, heisst Jahr, gerechnet von einem Frühlingsanfang (21. März) bis zum nächsten.

1 Jahr = 365^{d} 5^{h} $48^{\text{'}}$ $46''$. 1 Jahr = 12 Monate;
 1 Monat wird gewöhnlich = 30 Tage, 1 Jahr = 52 Wochen gerechnet.

Im bürgerlichen Leben rechnet man das Jahr zu 365 Tagen und ersetzt den hiedurch bewirkten Ausfall von beinahe 6 Stunden, indem man bei jedem vierten Jahr einen Tag

— 24. Februar — einschaltet. Alle durch 4 teilbaren Jahreszahlen bestimmen Schaltjahre. (Julianischer Kalender.)

Da aber hiedurch das Jahr um ungefähr $11' 14''$ zu gross genommen wird, so lässt man alle 400 Jahre 3 Schalttage ausfallen. Demzufolge bestimmen von den auf 00 endigenden Jahreszahlen nur jene ein Schaltjahr, welche durch 400 teilbar sind, also 2000, 2400 . . .; dagegen sind keine Schaltjahre 1900, 2100, 2200 (Gregorianischer Kalender.)

Die Zeitangabe (das Datum) geschieht in der Weise, dass man sagt, am wievielten Tage des wievielten Monats des wievielten Jahres nach Christi Geburt irgend ein Ereignis stattfand; z. B. die Schlacht bei Leipzig war am 18. Oktober 1813, d. h. am 18ten Tage des 10ten Monats des 1813ten Jahres nach Christi Geburt.

Für die Rechnung muss man jedoch diese Angabe des Datum in die Angabe der in dem betreffenden Momente verflossenen Zeit übersetzen; z. B.: Als die Schlacht bei Leipzig geschlagen wurde, waren seit Christi Geburt verflossen: 1812 Jahre 9 Monate 17 Tage.

6. Das Bogenmass und das Winkelmass.

Als Einheit dient der ganze Kreis, eingeteilt in 360 Grade (360°); $1^\circ = 60$ Minuten ($'$); $1' = 60$ Sekunden ($''$).

7. Das Temperaturmass.

Um den Grad des Wärmezustandes oder die Temperatur eines Körpers zu bestimmen, bedient man sich des Thermometers, eines Instrumentes, dessen Einrichtung auf den Erfahrungssatze beruht, dass die Wärme alle Körper ausdehnt, und dass diese Ausdehnung besonders beim Quecksilber innerhalb gewisser Grenzen sehr regelmässig vor sich geht. Auf jedem Thermometer sind zunächst die beiden sogenannten Fundamentalpunkte, der Eispunkt und der Siedepunkt, bestimmt. Es sind dies jene beiden festen Punkte, auf welche sich das Quecksilber unveränderlich einstellt, wenn die Thermometerröhre einmal in schmelzendes Eis, und dann in die Dämpfe des siedenden Wassers gehalten wird. Der Abstand dieser beiden Punkte, der sogenannte Fundamentalabstand, wurde von Réaumur in 80, von dem Schweden Stroemer* in 100 und von Fahrenheit in 180

*) Da man den Schweden Celsius für den Urheber dieser Einteilung hielt, bezeichnete man die Grade nach diesem Thermometer mit C. Diese Bezeichnung kann wohl beibehalten werden, wenn man den Buchstaben C ausspricht „Centigrade“. Celsius bezeichnete den Siedepunkt mit 0° und den Eispunkt mit 100° .

gleiche Teile oder Grade geteilt, wobei dann noch der Eis-
punkt von Réaumur und Stroemer mit 0° , von Fahrenheit
mit 32° , der Siedepunkt folglich von R. mit 80° , von Str.
mit 100° und von F. mit 212° bezeichnet wurde.

Aus einer solchen Gradeinteilung oder Thermometer-
skala kann nun nach dem jeweiligen Stande des Quecksilbers
in der Glasröhre die Temperatur der mit der Röhre in Be-
rührung stehenden Körper erkannt werden.

Die Temperaturangaben nach der einen Skala lassen sich
leicht auf die der beiden anderen reduzieren.

$$\begin{aligned} \text{Es sind: } n^{\circ} \text{ R.} &= \frac{5}{4} n^{\circ} \text{ C.} = \left(\frac{9}{4} n + 32\right)^{\circ} \text{ F.} \\ n^{\circ} \text{ C.} &= \frac{4}{5} n^{\circ} \text{ R.} = \left(\frac{9}{5} n + 32\right)^{\circ} \text{ F.} \\ n^{\circ} \text{ F.} &= \frac{4}{9} (n - 32)^{\circ} \text{ R.} = \frac{5}{9} (n - 32)^{\circ} \text{ C.} \end{aligned}$$

Das metrische Mass- und Gewichtssystem.

§ 23.

Das metrische System, welches zu Ende des vorigen
Jahrhunderts zuerst in Frankreich aufgestellt wurde und seit-
dem fast allgemeine Geltung erlangt hat, ist unter den ver-
schiedenen Systemen für Aufstellung und Benennung von Ein-
heiten das weitaus vorzüglichste. Seine Hauptvorzüge bestehen
einmal darin, dass alle Einheiten dezimal geteilt und verviel-
fältigt werden, d. h., dass die Reduktionszahlen immer 10,
100, 1000 u. s. f. sind, dann aber, dass die Einheiten für
Flächen- und Raummass, sowie für das Gewicht mit der
Längeneinheit in einem einfachen unmittelbaren Zusammen-
hange stehen.

Die Grundlage des Systems bildet das Meter (der
Stab). Es ist das Meter (m) gleich dem zehnmillionten Teile
eines Meridian-Quadranten der Erde, und zwar des durch die
Pariser Sternwarte gehenden, also gleich dem vierzigmillionten
Teile des Umfanges der Erde. Aus dem Meter sind alle übrigen
Masse und Gewichte abgeleitet. Die Benennung der Einheiten
verschiedener Ordnung geschieht durch Vorsilben, indem den
Einheiten niedrigerer Ordnung die aus dem Lateinischen ab-
geleiteten Wörter: deci (d) — 10, centi (c) — 100, milli (m)
— 1000, den Einheiten höherer Ordnung aber die aus dem
Griechischen abgeleiteten Wörter: Dekä (D) — 10, Hekto (h) —
100, Kilo (k) — 1000, Myria (M) — 10000 vorgesetzt werden.

Die Einheiten des metrischen Systems sind nunmehr
folgende:

1. Längenmass.

Einheit: das Meter (1 m); 1 m = 10 Decimeter (dm);
1 dm = 10 Centimeter (cm); 1 cm = 10 Millimeter (mm);
10 m = 1 Dekameter (Dm); 10 Dm = 1 Hektometer (hm);
10 hm = 1 Kilometer (km); 10 km = 1 Myriameter (Mm).

Hieraus ergibt sich folgende Uebersicht:

Mm	km	hm	Dm	m	dm	cm	mm
1	10	100	1 000	10 000	100 000	1 000 000	10 000 000
	1	10	100	1 000	10 000	100 000	1 000 000
		1	10	100	1 000	10 000	100 000
			1	10	100	1 000	10 000
				1	10	100	1 000
					1	10	100
						1	10

Dm und hm werden im Verkehr nicht gebraucht.

2. Flächenmass.

Einheit: das Quadratmeter (qm), d. i. ein Quadrat, dessen Seite 1 m lang ist. 1 qm = 100 Quadratdecimeter (qdm);
1 qdm = 100 Quadratcentimeter (qcm); 1 qcm = 100 Quadratmillimeter (qmm). 100 qm = 1 Quadratdekameter (qDm);
100 qDm = 1 Quadrathektometer (qhm); 100 qhm = 1 Quadratkilometer (qkm).

Das qDm heisst auch Ar (a) und das qhm heisst Hectar (ha). Es ist also:

ha	a	qm	qdm	qcm	qmm
1	10	10 000	1 000 000	100 000 000	10 000 000 000
	1	100	10 000	1 000 000	100 000 000
		1	100	10 000	1 000 000
			1	100	10 000
				1	100

C. Raummass.

a) Körpermass.

Einheit: das Kubikmeter (cbm), d. i. ein Würfel, dessen Kante 1 m lang ist. 1 cbm = 1000 Kubikdecimeter (cdm);
1 cdm = 1000 Kubikcentimeter (ccm); 1 ccm = 1000 Kubikmillimeter (cmm). Es ist demnach:

cbm	cdm	ccm	cmm
1	1 000	1 000 000	1 000 000 000
	1	1 000	1 000 000
		1	1 000

Einheiten höherer Ordnung als das cbm sind hier nicht im Gebrauche.

b) Hohlmass.

Einheit: das Liter (l), dessen Rauminhalt 1 cdm beträgt. 1 l = 10 Deciliter (dl); 1 dl = 10 Centiliter (cl); 1 cl = 10 Milliliter (ml). 10 l = 1 Dekaliter (Dl); 10 Dl = 1 Hectoliter (hl); 10 hl = 1 Kiloliter (kl).

Es folgt daraus, dass 1 ml = 1 ccm und 1 kl = 1 cbm, ferner **1 cbm = 10 hl**. Gebraucht wird gewöhnlich nur **1 hl = 100 l**.

c) Holzmaass.

Einheit: das Ster (st), dessen Rauminhalt 1 cbm beträgt.

4. Gewicht.

Als Einheit dient das Gramm (g), d. i. das Gewicht eines ccm destillierten Wassers, gewogen im luftleeren Raume bei einer Temperatur von $+4^{\circ}$ C.

1000 g geben ein Kilogramm (kg); es ist also 1 kg gleich dem Gewichte von 1 cdm Wasser. 500 g nennt man ein Pfund ($\mathfrak{P}$); 50 kg oder 100 $\mathfrak{P}$ geben 1 Zentner (Ztr.) und 1000 kg oder 2000 $\mathfrak{P}$ eine Tonne (t). Das Dg heisst auch Neulot.

Die Reduktionszahl für Einheiten niederer und höherer Ordnung ist 10, so dass man folgende Uebersicht erhält:

Ztr.	kg	$\mathfrak{P}$	hg	Dg	g	dg	cg	mg
1	50	100	500	5000	50 000	500 000	5 000 000	50 000 000
	1	2	10	100	1 000	10 000	100 000	1 000 000
		1	5	50	500	5 000	50 000	500 000
			1	10	100	1 000	10 000	100 000
				1	10	100	1 000	10 000
					1	10	100	1 000
						1	10	100
							1	10

Ausführung der Reduktion.

§ 24.

1. Einheiten höherer Ordnung werden in Einheiten niederer Ordnung verwandelt, indem man mit der Anzahl der Einheiten der höheren Ordnung die Reduktionszahl multipliziert. (Resolvieren.)

Denn sind z. B. 7 $\mathfrak{P}$ in g zu verwandeln, so hat man 1 $\mathfrak{P}$ = 500 g, folglich sind 7 $\mathfrak{P}$ gleich 7 mal so viel g, also 7 $\mathfrak{P}$ = 500 g · 7 = 3500 g.

Sind Einheiten von verschiedenen Ordnungen in Einheiten der niedrigsten Ordnung zu verwandeln, so verwandelt man die Einheiten der höchsten Ordnung in die der nächst niedrigeren, addiert dazu die vorhandenen Einheiten dieser Ordnung, verwandelt dann wieder die Summe dieser Einheiten in solche der folgenden Ordnung und fährt so fort, bis man Einheiten der niedrigsten Ordnung hat; z. B.

$$\begin{array}{rcl}
 7^d \ 15^h \ 20' & = & (60 \cdot (24 \cdot 7 + 15) + 20)' = 11000'; \\
 \text{nämlich } 7^d & = & 24^h \cdot 7 = 168^h \\
 & + & 15^h \\
 \hline
 & 183^h & = 60' \cdot 183 = 10980' \\
 & & + \quad 20' \\
 & & \hline
 & & 11000'
 \end{array}$$

Wesentlich vereinfacht wird die Reduktion, sobald die Reduktionszahl 10 ist; man hat alsdann dem Dezimalsystem zufolge nur die Einheiten der nächst niedrigeren Ordnung rechts neben die der höheren zu setzen; fehlen dabei die Einheiten irgend einer Ordnung, so ersetzt man die entsprechende Stelle durch eine Null. Ist die Reduktionszahl 100, so nehmen die nächst niedrigeren Einheiten immer die folgenden zwei Stellen ein, ebenso bei 1000 die folgenden drei Stellen; z. B.

$$\begin{array}{l}
 5 \text{ Ballen } 7 \text{ Ries} = 57 \text{ Rss} \\
 3 \text{ Kronen } 8 \text{ M } 5 \text{ ₤} = 3805 \text{ ₤} \\
 23 \text{ Ztr } 47 \text{ ♂} = 2347 \text{ ♂} \\
 6 \text{ m } 4 \text{ qm } 3 \text{ cm} = 643 \text{ cm} \\
 12 \text{ m } 3 \text{ cm } 2 \text{ mm} = 12032 \text{ mm} \\
 4 \text{ qm } 23 \text{ qdm } 5 \text{ qcm} = 42305 \text{ qcm} \\
 9 \text{ cbm } 57 \text{ edm } 8 \text{ ccm} = 9057008 \text{ ccm}
 \end{array}$$

2. Einheiten niedrigerer Ordnung werden in Einheiten höherer Ordnung verwandelt, indem man die Anzahl der Einheiten der niedrigeren Ordnung durch die Reduktionszahl dividiert.

Sind z. B. 420 Minuten in Stunden zu verwandeln, so hat man ebenso oftmal 1^h als man $60'$ hat; $60'$ aber hat man so oftmal, als 60 in 420 enthalten ist, mithin sind

$$420' = 1^h \cdot (420 : 60) = 1^h \cdot 7 = 7^h.$$

Bleibt bei der Division ein Rest, so drückt derselbe Einheiten der gegebenen Ordnung aus; z. B.

$$23470 \text{ g} = 1 \text{ ♂} \cdot (234|70 : 5|00) = 46 \text{ ♂ } 470 \text{ g}$$

470 Rest

$$897440 \text{ Zeitsek.} = 10^d \ 9^h \ 17' \ 20''.$$

$$\begin{array}{rcl}
 89744|0 : 6|0 & = & 14957 \text{ (')} ; 14957 : 60 = 249 \text{ (}^h\text{)} ; 249 : 24 = 10 \text{ (}^d\text{)} \\
 20 \text{ (}'') & & 17 \text{ (')} \qquad \qquad \qquad 9 \text{ (}^h\text{)}
 \end{array}$$

Ist die Reduktionszahl 10, 100, 1000, so hat man nur von der gegebenen Zahl von rechts nach links 1, 2, 3 Stellen abzuschneiden, um die Einheiten der verschiedenen Ordnungen zu erhalten; z. B.

$$\begin{aligned} 21|45 \text{ M} &= 21 \text{ M} 45 \text{ M}; 30|07 \text{ Ztr} = 30 \text{ Ztr} 7 \text{ Ztr} \\ 34|7|8|3 \text{ mm} &= 34 \text{ m} 7 \text{ dm} 8 \text{ cm} 2 \text{ mm} \\ 4|07|00|86 \text{ qmm} &= 4 \text{ qm} 7 \text{ qdm} 86 \text{ qmm} \\ 50|000|045 \text{ ccm} &= 50 \text{ cbm} 46 \text{ ccm}. \end{aligned}$$

Die 4 Grundrechnungsarten mit benannten Zahlen.

Addition und Subtraktion.

§ 25.

Addiert oder subtrahiert können nur gleichartig gleichnamige Zahlen werden; die Summe oder Differenz ist alsdann von derselben Art; z. B.

$$\begin{aligned} 15 \text{ M} + 17 \text{ M} &= 32 \text{ M}. \\ 42 \text{ kg} - 18 \text{ kg} &= 24 \text{ kg}. \end{aligned}$$

Sind die Zahlen mehrfach benannt, so addiert oder subtrahiert man bei der niedrigsten Ordnung beginnend die Einheiten gleicher Ordnung.

Bei der Addition werden dabei stets die sich ergebenden Einheiten niedrigerer Ordnung auf Einheiten höherer Ordnung reduziert.

Ist bei der Subtraktion an irgend einer Stelle der Minuend kleiner als der Subtrahend, so nimmt man im Minuenden von der nächst höheren Ordnung eine Einheit, reduziert diese auf Einheiten der niedrigeren Ordnung und addiert die gegebenen Einheiten dieser Ordnung hinzu, worauf die Subtraktion ausgeführt werden kann.

Mehrfach benannte Zahlen kann man auch dadurch addieren oder subtrahieren, dass man sie zunächst auf Einheiten der niedrigsten oder auch der höchsten Ordnung reduziert, und die als einfach benannte Zahl erhaltene Summe oder Differenz wieder in eine mehrfach benannte Zahl verwandelt. Von grossem Vorteile ist dieses Verfahren bei benannten Zahlen mit dezimaler Teilung.

Beispiele:

1. In einer Druckerei wurde an Papier während einer Woche verbraucht: 2 Bll. 5 Rss. 14 Bch. 20 Bg., 1 Bll. 9 Rss. 16 Bg., 2 Bll. 18 Bch. 20 Bg., 1 Bll. 7 Rss., 1 Bll. 8 Rss.

11 Bch., 2 Bll. 15 Bch. 4 Bg. Wie gross war der Gesamtverbrauch an Papier während der Woche?

2 Bll.	5 Rss.	14 Bch.	20 Bg.	
1 „ 9	„ —	„ 16	„	
2 „ —	„ 18	„ 20	„	Der Gesamtverbrauch während der
1 „ 7	„ —	„ —	„	Woche betrug somit 12 Bll. 2 Rss.
1 „ 8	„ 11	„ —	„	10 Bg.
2 „ —	„ 15	„ 4	„	
(3)	(3)	(2)		
32 : 10 60 : 20 60 : 25				
12 Bll. 2 Rss. — Bch. 10 Bg.				

2. Von 5 Stücken Tuch ist das erste 10 m 8 dm 5 cm, das zweite 14 m 3 cm, das dritte 9 m 8 dm 6 cm, das vierte 17 m 2 dm, und das fünfte 15 m 8 cm lang. Wie viel m Länge haben alle 5 Stücke zusammen?

1085 cm	
1403 „	
986 „	Alle 5 Stücke haben zusammen eine Länge von
1720 „	67 m 2 cm.
1568 „	
6702 cm.	

3. Ein Kaufmann besitzt 28 Ztr 16 ℥ 125 g Zucker. Er verkauft davon 13 Ztr 43 ℥ 375 g. Wie viel bleibt ihm noch übrig?

Der Kaufmann besitzt:	²⁷ 28 Ztr ¹¹⁵ 16 ℥ ⁶²⁵ 125 g	+	Es bleiben dem Kauf-
Er verkauft:	13 „ 43 „ 375 „	—	mann übrig 14 Ztr 72 ℥
			250 g Zucker.
	14 Ztr 72 ℥ 250 g		

4. Von zwei Landgütern besteht das eine aus 35 ha 10 a 5 qm, das andere aus 29 ha 4 a 83 qm. Um wie viel ist das erstere grösser als das letztere?

I. Landgut	351005 qm	+	Das erstere Landgut ist grösser um
II. Landgut	290483 „	—	6 ha 5 a 22 qm.
	60522 qm.		

5. Es wurde jemand am 24. April 1817 geboren und 53 Jahre 10 Monate 19 Tage alt. Wann ist er gestorben?

Geb. nach Verlauf von 1816	Jhr. 3	Mt. 23	Tg. +	Er starb am
Alter 53	„ 10	„ 19	„ +	13. März 1871.

Gest. nach Verlauf von 1870 Jhr. ¹⁴2 Mt. ⁴²12 Tg.

6. Es wurde jemand am 27. November 1835 geboren und starb am 5. Januar 1874. Wie alt ist er geworden?

Gest. n. Vrlf. v. 1873	Jhr. —	Mt. ³⁴ 4	Tg. +	Er ist 38 Jhr. 1 Mt.
Geb. n. Vrlf. v. 1834	„ 10	„ 26	„ —	8 Tg. alt geworden.
Alter				
	38 Jhr. 1 Mt. 8 Tg.			

Multiplikation.

§ 26.

Aus dem Begriffe der Multiplikation folgt, dass lediglich der Multiplikand eine benannte Zahl sein kann, der Multiplikator aber eine unbenannte Zahl sein muss, oder als solche anzunehmen ist. Benannte Zahlen können also nur mit unbenannten Zahlen multipliziert werden; das Produkt erhält die Benennung des Multiplikanden; z. B.

$$12 \text{ M} \cdot 3 = 12 \text{ M} + 12 \text{ M} + 12 \text{ M} = 36 \text{ M}$$

Nicht aber kann man 12 M mit 3 M multiplizieren, denn das würde heissen: 12 M soll 3 M mal als Summand gesetzt werden, was keinen Sinn hat.

Wenn der Preis von $1 \text{ £ } 5 \text{ M}$ beträgt, so kosten 24 £ 24mal so viel M , also $5 \text{ M} \cdot 24 = 120 \text{ M}$.

Obwohl hier die Zahl 24 als benannte gegeben ist, erscheint sie bei der Multiplikation als unbenannte Zahl.

Da ferner $12 \text{ M} \cdot 3 = 3 \text{ M} \cdot 12 = 36 \text{ M}$ und $24 \text{ £ } \text{à } 5 \text{ M} = 5 \text{ £ } \text{à } 24 \text{ M} = 120 \text{ M}$, so folgt, dass man auch hier die Faktoren vertauschen, und mithin alle Vorteile der Multiplikation mit unbenannten Zahlen anwenden kann.

Um mehrfach benannte Zahlen zu multiplizieren, beginnt man die Multiplikation bei der niedrigsten Ordnung, reduziert das Produkt auf Einheiten der nächst höheren Ordnung und addiert diese zu dem Produkte, welches man durch die Multiplikation dieser Ordnung erhalten hat.

Man kann auch mehrfach benannte Zahlen auf Einheiten der niedrigsten Ordnung reduzieren, diese sodann multiplizieren, und das Produkt wieder in mehrfach benannte Zahlen verwandeln, ein Verfahren, welches wieder bei benannten Zahlen mit dezimaler Teilung besonders vorteilhaft ist.

Bemerkung: Aufgaben dieser Art gehören, strenge genommen, in das Gebiet der Verhältnisse und Proportionen (Regeldetri); doch ist die Richtigkeit der Lösung durch eine einfache Multiplikation leicht einzusehen, weshalb dieselbe auch immer dadurch vorgenommen werden kann.

Beispiele:

1. Das monatliche Einkommen jemandes beträgt $15 \text{ £ } 18 \text{ sh } 8 \text{ d}$. Welches ist sein Einkommen in einem Jahre?

Da 1 Jahr = 12 Mt., so beträgt das Einkommen 12 mal 15 £ 16 sh 8 d, und man hat

$$\begin{array}{rcl} 8 \text{ d} \cdot 12 = 96 \text{ d} & 18 \text{ sh} \cdot 12 = 216 \text{ sh} & 15 \text{ £} \cdot 12 = 180 \text{ £} \\ 96 \text{ d} = (96 : 12) \text{ sh} = 8 \text{ sh} & 216 \text{ sh} + 8 \text{ sh} = 224 \text{ sh} & 180 \text{ £} + 11 \text{ £} 4 \text{ sh} = \\ & 224 \text{ sh} = (224 : 4) \text{ £} = 56 \text{ £} & 191 \text{ £} 4 \text{ sh} \end{array}$$

Das jährliche Einkommen beträgt 191 £ 4 sh.

Oder: 15 £ = 20 sh. 15 = 300 sh

$$\begin{array}{rcl} & + 18 \text{ sh} & \\ \hline 318 \text{ sh} = 12 \text{ d} \cdot 318 = 3816 \text{ d} & & 3824 \text{ d} \cdot 12 = \\ & + 8 \text{ d} & 45888 \text{ d} \\ \hline & 3824 \text{ d} & \end{array}$$

$$45888 \text{ d} = (45888 : 12) \text{ sh} = 3824 \text{ sh}$$

$$3824 \text{ sh} = (3824 : 4) \text{ £} = 956 \text{ £}$$

$$\text{Oder: } (15 \text{ £} 18 \text{ sh} 8 \text{ d}) \cdot 12 = (12 \cdot (20 \cdot 15 + 18) + 8) \text{ d} \cdot 12.$$

2. Ein Eisenbahnzug legt in 1 Minute 4 hm 5 m 8 dm 5 cm zurück; welche Strecke wird er in einer Stunde durchlaufen haben?

In 1 Stunde = 60 Minuten durchläuft der Eisenbahnzug 40585 cm . 60 = 2435100 cm = **24 km 351 m.**

3. Von einer Ware wird 1 £ für 2 M 5 º verkauft; was kosten von dieser Ware 12 Ztr 36 £?

$$2 \text{ M} 5 \text{ º} = 205 \text{ º}; 12 \text{ Ztr} 36 \text{ £} = 1236 \text{ £}.$$

$$205 \text{ º} \cdot 1236 = 253380 \text{ º} = 2533 \text{ M} 80 \text{ º}.$$

$$12 \text{ Ztr} 36 \text{ £} \text{ kosten also } 2533 \text{ M} 80 \text{ º}.$$

Division.

§ 27.

Bei der Division benannter Zahlen sind zwei Fälle zu unterscheiden:

- a) Der Dividend ist eine benannte, der Divisor aber eine unbenannte Zahl, oder doch als solche anzunehmen; alsdann ist der Quotient mit dem Dividenden von derselben Art und Benennung; z. B. 20 M soll durch 5 dividiert werden, oder: wenn 5 kg 20 M kosten, was kostet 1 kg?

Da jedes kg gleichviel kostet, so kostet 1 kg den fünften Teil von dem, was alle 5 kg zusammen kosten, also den fünften Teil von 20 M, und man hat $20 \text{ M} : 5 = 4 \text{ M}.$

1 kg kostet also 4 M.

Oder: Eine Summe von 192 M ist unter 12 Personen gleichmässig zu verteilen; wie viel M erhält jede Person?

Da jede Person gleich viel erhält, so bekommt 1 Person den 12. Teil von 192 $\mathcal{M}$, also $192 \mathcal{M} : 12 = 16 \mathcal{M}$. Jede Person erhält 16 $\mathcal{M}$.

Ist der Dividend eine mehrfach benannte Zahl, so dividiert man zunächst die Einheiten der höchsten Ordnung, reduziert den etwa bleibenden Rest auf Einheiten der nächst niedrigeren Ordnung, addiert die gegebenen Einheiten dieser Ordnung hinzu, dividiert wieder und fährt damit fort, bis man zu den Einheiten der niedrigsten Ordnung gelangt ist.

Man kann mehrfach benannte Zahlen, besonders solche mit dezimaler Teilung, vor der Division auch in Einheiten der niedrigsten gegebenen Ordnung verwandeln. Z. B.

1. Es wurden 15 Ballen Kaffee für 102 £ 11 sh 3 d verkauft; was kostete 1 Ballen?

1 Ball. kostete den 15ten Teil von 102 £ 11 sh 3 d.

$$102 \text{ £} : 15 = 6 \text{ £}$$

$$\text{Rest } 12 \text{ £} = 20 \text{ sh} \cdot 12 = 240 \text{ sh}$$

$$+ 11 \text{ sh}$$

$$\hline 251 \text{ sh} : 15 = 16 \text{ sh}$$

$$\text{Rest } 11 \text{ sh} = 12 \text{ d} \cdot 11 = 132 \text{ d}$$

$$+ 3 \text{ d}$$

$$\hline 135 \text{ d} : 15 = 9 \text{ d}$$

1 Bll. kostete also 6 £ 16 sh 9 d.

2. Eine Lokomotive legt in 1 Stunde einen Weg von 18 km 3 hm 4 Dm 8 m zurück; welchen Weg in 1 Minute?

In 1' legt sie den 60sten Teil von 18 km 3 hm 4 Dm 8 m = 183480 dm zurück. Es ist aber

$$183480 \text{ dm} : 60 = 3058 \text{ dm.}$$

Es legt die Lokomotive in 1 Minute zurück 305 m 8 dm.

b) Der Dividend und Divisor sind benannte Zahlen derselben Art; alsdann ist der Quotient eine unbenannte Zahl; z. B.

1 kg kostet 4 $\mathcal{M}$; wie viel kg erhält man für 20 $\mathcal{M}$?

Man erhält so oftmal 1 kg, so oftmal 4 $\mathcal{M}$ vorhanden sind; nun sind aber 4 $\mathcal{M}$ so oftmal vorhanden, als 4 $\mathcal{M}$ in 20 $\mathcal{M}$ enthalten sind, d. h. so oftmal 4 $\mathcal{M}$ von 20 $\mathcal{M}$ weggenommen werden können; man hat also $20 \mathcal{M} : 4 \mathcal{M} = 5$, und erhält demnach 5 kg für 20 $\mathcal{M}$.

Oder: 192 $\mathcal{M}$ sollen unter mehrere Personen so verteilt werden, dass jede 16 $\mathcal{M}$ erhält; wie viele Personen sind es?

Es fragt sich hier, wie oftmals sind 16 $\mathcal{M}$ vorhanden; so oftmal als 16 $\mathcal{M}$ in 192 $\mathcal{M}$ enthalten sind, mithin hat man $192 \mathcal{M} : 16 \mathcal{M} = 12$, und es sind also 12 Personen.

Sind Dividend und Divisor mehrfach benannte Zahlen, so verwandelt man beide in einfach benannte Zahlen gleicher Ordnung und führt hierauf die Division aus. Z. B.

3. Zur Herstellung einer Druckschrift wurden im ganzen 46 Ballen 16 Buch Papier verbraucht. Wenn nun zu 1 Exemplar 3 Buch 21 Bogen verwendet wurden, wie viel Exemplare wurden gedruckt?

Es wurde so oftmal 1 Exemplar gedruckt, so oftmal die Menge Papier, welche zu 1 Exemplar nötig war, im ganzen verbraucht wurde, so oftmal also 3 Buch 21 Bg. in 46 Bll. 16 Bch. enthalten sind. Nun sind aber

$$\begin{array}{rcl} 3 \text{ Bch. } 21 \text{ Bg.} & = & 96 \text{ Bg. und } 46 \text{ Bll. } 16 \text{ Bch.} = 230400 \text{ Bg.,} \\ 25 \cdot 3 & = & 75 \qquad 10 \cdot 46 = 460 \\ & + & 21 \qquad 20 \cdot 460 = 9200 \\ \hline & & 96 \qquad \qquad \qquad + \quad 16 \\ & & \qquad \qquad \qquad \hline & & 25 \cdot 9216 = 230400 \end{array}$$

ferner $230400 \text{ Bg.} : 96 \text{ Bg.} = 2400$.

Es wurden 2400 Exemplare gedruckt.

4. Eine Summe von 91 $\mathcal{M}$ 8 fl. wurde unter 3 Personen so verteilt, dass die zweite Person doppelt so viel als die erste, die dritte aber dreimal so viel als die zweite erhielt. Wie viel erhielt jede Person?

Erhielt die erste Person 1 Teil, so erhielt die zweite 2 Teile und die dritte $(2 \cdot 3)$ Teile = 6 Teile; es ist also die vorhandene Summe in $(1 + 2 + 6)$ Teile = 9 Teile zu teilen; somit kommt auf 1 Teil 9108 fl. : $9 = 1012 \text{ fl.} = 10 \mathcal{M} 12 \text{ fl.}$, und es erhält die erste Person 10 $\mathcal{M}$ 12 fl. , die zweite Person $(10 \mathcal{M} 12 \text{ fl.}) \cdot 2 = 20 \mathcal{M} 24 \text{ fl.}$, die dritte Person $(20 \mathcal{M} 24 \text{ fl.}) \cdot 3 = 60 \mathcal{M} 72 \text{ fl.}$.

Durchschnittsberechnungen.

5 Ein Thermometer zeigte mittags 12 Uhr an den einzelnen Tagen einer Woche folgende Wärmegrade nach Réaumur: 14° , 17° , 16° , 22° , 19° , 18° , 20° ; welches ist der mittlere Thermometerstand in dieser Woche?

Derselbe ist

$$(14^\circ + 17^\circ + 16^\circ + 22^\circ + 19^\circ + 18^\circ + 20^\circ) : 7 = 126^\circ : 7 = 18^\circ.$$

6. Jemand kauft 25 Flaschen Wein à 1 $\mathcal{M}$ 54 fl. , 36 Fl. à 1 $\mathcal{M}$ 40 fl. , 45 Fl. à 1 $\mathcal{M}$ 25 fl. und 39 Fl. à 1 $\mathcal{M}$. Welches ist der durchschnittliche Preis einer Flasche?

$$\begin{array}{rcl} 25 \text{ Flaschen à } 1 \mathcal{M} 54 \text{ fl.} & \text{kosten} & 154 \text{ fl.} \cdot 25 = 38 \mathcal{M} 50 \text{ fl.} \\ 36 \text{ „ „ à } 1 \mathcal{M} 40 \text{ fl.} & \text{„} & 140 \text{ fl.} \cdot 36 = 50 \mathcal{M} 40 \text{ fl.} \\ 45 \text{ „ „ à } 1 \mathcal{M} 25 \text{ fl.} & \text{„} & 125 \text{ fl.} \cdot 45 = 56 \mathcal{M} 25 \text{ fl.} \\ 39 \text{ „ „ à } 1 \mathcal{M} & \text{„} & 100 \text{ fl.} \cdot 39 = 39 \mathcal{M} \end{array}$$

$$145 \text{ Flaschen kosten zusammen} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 184 \mathcal{M} 15 \text{ fl.}$$

1 Flasche kostet somit durchschnittlich

$$18415 \text{ fl.} : 145 = 127 \text{ fl.} = 1 \mathcal{M} 27 \text{ fl.}$$

III. Teilbarkeit der Zahlen.

Erklärungen.

§ 28.

Eine ganze Zahl heisst teilbar durch eine andere ganze Zahl, wenn diese letztere in der ersten ohne Rest enthalten ist, die Division also eine ganze Zahl als Quotienten gibt.

Eine ganze Zahl, welche in einer anderen ohne Rest enthalten ist, heisst ein Teiler oder ein Mass dieser Zahl.

Eine ganze Zahl, in welcher eine andere ohne Rest enthalten ist, wird ein Vielfaches oder ein Dividuum dieser Zahl genannt.

Jede Zahl hat Eins und sich selbst zum Masse, d. h. jede Zahl ist durch 1 und sich selbst teilbar.

Die Zahlen, welche nur 1 und sich selbst zum Masse haben, heissen absolute Primzahlen (Primzahlen an sich, auch einfache Zahlen), z. B. 1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, u. s. w.

Im Gegensatze zu diesen werden die Zahlen, welche auch andere Zahlen zum Masse haben, zusammengesetzte Zahlen genannt, z. B. 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, u. s. w.

Eine Zahl, welche in zwei oder mehreren anderen ohne Rest enthalten ist, heisst ein gemeinschaftliches Mass oder ein gemeinschaftlicher Teiler (g. T.) dieser Zahlen; z. B. die Zahl 12 ist ein g. T. der Zahlen 36 und 48.

Eine Zahl, in welcher zwei oder mehrere andere ohne Rest enthalten sind, heisst ein gemeinschaftlicher Dividuum oder ein gemeinschaftliches Vielfaches (g. V.) dieser Zahlen; z. B. die Zahl 24 ist ein g. V. der Zahlen 6 und 8.

Je zwei ganze Zahlen haben immer Eins als g. T.

Zwei oder mehrere Zahlen, welche nur 1 als g. T. haben, werden relative Primzahlen (Primzahlen unter sich) genannt; z. B. 5 und 12; 8, 15 und 49; 13, 24, 35 und 40.

Jede durch 2 teilbare Zahl heisst eine gerade; alle übrigen Zahlen nennt man ungerade.

Allgemeine Regeln über die Teilbarkeit.

§ 29.

1. Haben zwei Zahlen einen g. T., so ist dieser auch ein T. sowohl der Summe als der Differenz der beiden Zahlen.

Z. B. die Zahlen 81 und 36 haben den g. T. 9, so dass $81 : 9$ und $36 : 9$ ganze Zahlen als Quotienten geben; dann ist aber auch die Summe $81 : 9 + 36 : 9$ sowie die Differenz $81 : 9 - 36 : 9$ eine ganze Zahl, oder da $81 : 9 + 36 : 9 = (81 + 36) : 9 = 117 : 9$
und $81 : 9 - 36 : 9 = (81 - 36) : 9 = 45 : 9$,
so sind die Quotienten $117 : 9$ und $45 : 9$ ganze Zahlen, mithin 117 sowohl als auch 45 durch 9 teilbar.

2. Der T. einer Zahl, sowie alle Teiler dieses T. sind auch T. jedes Vielfachen der Zahl.

Ist z. B. 12 ein T. der Zahl 36, so ist 12 auch ein T. von $36 \cdot 7 = 252$; denn $(36 \cdot 7) : 12 = (36 : 12) \cdot 7 = 3 \cdot 7$; also ist $252 = 36 \cdot 7$ durch 12 ohne Rest teilbar. Da ferner jeder Teiler von 12, nämlich 2, 3, 4, 6, ebenfalls ein T. von 36 ist, so ist er auch ein T. von 252.

3. Ist eine Zahl durch zwei oder mehrere von einander verschiedene absolute Primzahlen, oder auch durch zwei relative Primzahlen teilbar, so ist sie auch durch das Produkt derselben teilbar.

Ist z. B. die Zahl 2730 durch die Zahlen 2, 3, 5 und 7 teilbar, so ist die Zahl 2730 gleich einem Produkte aus $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$ und noch einem weiteren Faktor, hier 13; da aber das Produkt $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13$ durch das Produkt $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$ teilbar ist, so ist auch die Zahl 2730 durch $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$ d. i. durch 210 teilbar.

Sind ferner die relativen Primzahlen 4 und 15 beide Teiler der Zahl 420, so ist auch das Produkt $4 \cdot 15 = 60$ ein Teiler von 420.

Für mehr als zwei relative Primzahlen ist diese Regel im allgemeinen nicht gültig. Vergleiche § 33. 5.

Kennzeichen der Teilbarkeit.

§ 30.

1. Eine Zahl ist durch die 1., 2., 3., . . . Potenz der Zahlen 2 oder 5, also durch 2, 4, 8 . . . oder durch 5, 25, 125 . . . teilbar, wenn ihre 1., 2., 3., . . . letzten Stellen, als Zahl für sich betrachtet, durch die 1., 2., 3., . . . Potenz von 2 oder 5 teilbar sind. Z. B. 76 und 210 sind durch 2 teilbar, weil die letzten Stellen 6 und 0 durch 2 teilbar sind; 315 und 170 sind durch 5 teilbar, weil 5 und 0 durch 5 teilbar sind; 316 ist durch 4 teilbar, weil 16 durch 4 teilbar ist; 2375 ist durch 125 teilbar, weil 375 durch 125 teilbar ist.

Der Grund hiefür liegt darin, dass die Zahl 10, sowie jede Potenz von 10 sowohl durch 2 als auch durch 5 teilbar ist. Denn $76 = 70 + 6 = 7 \cdot 10 + 6$, ferner $315 = 310 + 5 = 31 \cdot 10 + 5$. Da nun aber $7 \cdot 10$ und $31 \cdot 10$ durch 2 und 5 teilbar sind, weil der Faktor 10 teilbar durch diese Zahlen ist, so ist der ganze Ausdruck $7 \cdot 10 + 6$ durch 2 teilbar, weil auch der zweite Summand 6 durch 2 teilbar ist, und $31 \cdot 10 + 5$ ist durch 5 teilbar, weil der zweite Summand 5 durch 5 teilbar ist. Es hängt somit die Teilbarkeit durch 2 oder 5 lediglich von

der Teilbarkeit der letzten Stelle ab. Es ist ferner $316 = 300 + 16 = 3 \cdot 100 + 16$; nun ist der eine Summand $3 \cdot 100$ durch 4 und durch 25 teilbar, weil derselbe ein Produkt, dessen einer Faktor 100 durch 4 und durch 25 teilbar ist, folglich ist die ganze Summe $3 \cdot 100 + 16$ durch diese Zahlen teilbar, wenn auch der andere Summand 16 durch dieselben teilbar ist. Die Teilbarkeit durch 4 und 25 hängt somit von der Teilbarkeit der letzten beiden Stellen durch diese Zahlen ab.

2. Eine Zahl ist durch 10, 100, 1000 u. s. w. teilbar, wenn bezüglich ihre 1, 2, 3 u. s. w. letzten Stellen aus Nullen bestehen. Z. B. ist $540 = 54 \cdot 10$, also durch 10, $3700 = 37 \cdot 100$, also durch 100, $457000 = 457 \cdot 1000$, also durch 1000 teilbar.

3. Eine Zahl ist durch 3 oder durch 9 teilbar, wenn die Quersumme ihrer einzelnen Ziffern durch 3 oder 9 teilbar ist. Z. B. 2514 ist durch 3 teilbar, weil $2 + 5 + 1 + 4 = 12$ und $12 : 3 = 4$; 52074 ist durch 9 teilbar, weil $4 + 7 + 0 + 2 + 5 = 18$ und $18 : 9 = 2$.

Der Grund hiefür liegt darin, dass

$$\begin{array}{lll} 10 = 1 \cdot 9 + 1 & \text{ferner} & 100 = 1 \cdot 99 + 1 & 1000 = 1 \cdot 999 + 1 \\ 20 = 2 \cdot 9 + 2 & & 200 = 2 \cdot 99 + 2 & 2000 = 2 \cdot 999 + 2 \\ 30 = 3 \cdot 9 + 3 & & 300 = 3 \cdot 99 + 3 & 3000 = 3 \cdot 999 + 3 \\ \text{u. s. f.} & & \text{u. s. f.} & \text{u. s. f.} \end{array}$$

und endlich die Zahlen 9, 99, 999 durch 3 und durch 9 teilbar sind. Es ist z. B.

$$2514 = 2000 + 500 + 10 + 4 = (2 \cdot 999 + 2) + (5 \cdot 99 + 5) + (1 \cdot 9 + 1) + 4 = (2 \cdot 999 + 5 \cdot 99 + 1 \cdot 9) + (2 + 5 + 1 + 4).$$

Nun ist aber jedes der Produkte innerhalb der ersten Klammer durch 9 teilbar, folglich auch die ganze Summe innerhalb der ersten Klammer, und es hängt demnach die Teilbarkeit nur noch von der Summe in der zweiten Klammer $2 + 5 + 1 + 4$ ab; ist diese durch 3 oder 9 teilbar, so ist der ganze Ausdruck oder, was dasselbe ist, die Zahl 2514 ebenfalls durch diese Zahlen teilbar. Die Summe $2 + 5 + 1 + 4$ ist aber die Quersumme der einzelnen Ziffern der gegebenen Zahl.

Anmerk. Hierauf gründet sich auch die sogenannte Neunerprobe, nämlich:

- a) Die Summe zweier oder mehrerer Zahlen lässt bei der Division der Quersumme ihrer Ziffern durch 9 denselben Rest übrig, wie die Summe der Reste, welche man bei gleicher Behandlung aus den Quersummen der einzelnen Zahlen erhält; z. B.

$$37085, \text{ Quersumme } 23 = 9 \cdot 2 + 5 \text{ (Rest)}$$

$$4725, \quad \quad \quad 18 = 9 \cdot 2 + 0 \quad \quad \quad "$$

$$90629, \quad \quad \quad 26 = 9 \cdot 2 + 8 \quad \quad \quad "$$

$$132439, \text{ Quersumme } 22 = 9 \cdot 2 + 4 \text{ (Rest). Es ist aber auch } 5 + 0 + 8 = 13 = 9 \cdot 1 + 4 \quad \quad \quad "$$

- b) Das Produkt zweier oder mehrerer Zahlen lässt bei der Division der Quersumme seiner Ziffern durch 9 denselben Rest übrig, wie das Produkt der Reste, welche man bei gleicher Behandlung aus den Quersummen der einzelnen Faktoren erhält; z. B.

$$45706, \text{ Quersumme } 22 = 9 \cdot 2 + 4$$

$$15082, \quad \quad \quad 16 = 9 \cdot 1 + 7$$

$$\text{Prod. } 689\,337\,892 \quad \quad \quad 55 = 9 \cdot 6 + 1; \text{ es ist aber auch } 4 \cdot 7 = 28 = 9 \cdot 3 + 1.$$

Wie auf Addition und Multiplikation, so kann die Neunerprobe auch auf die indirekten Operationen Subtraktion und Division angewendet werden.

Die Neunerprobe ist insofern trüglich, als die Summe der Fehler mehrerer Zahlen gleich 9 oder einem Vielfachen von 9 werden kann.

4. Eine Zahl ist durch 11 teilbar, wenn die Differenz aus der Summe ihrer ungeraden und aus der Summe ihrer geraden Stellen 0 oder 11 oder ein Vielfaches von 11 ist. (Ungerade Stellen sind die Einer, Hunderter etc., gerade Stellen die Zehner, Tausender u. s. f.) Z. B.

76538 ist durch 11 teilbar, weil

$$(7 + 5 + 8) - (6 + 3) = 20 - 9 = 11 \text{ ist;}$$

5 079481 ist durch 11 teilbar, weil

$$(1 + 4 + 7 + 5) - (8 + 9 + 0) = 17 - 17 = 0.$$

Der Grund hiefür liegt darin, dass

$10 = 11 - 1$	ferner	$20 = 2 \cdot 11 - 2$	ferner	$30 = 3 \cdot 11 - 3$
$100 = 99 + 1$		$200 = 2 \cdot 99 + 2$		$300 = 3 \cdot 99 + 3$
$1000 = 1001 - 1$		$2000 = 2 \cdot 1001 - 2$		$3000 = 3 \cdot 1001 - 3$
$10000 = 9999 + 1$		$20000 = 2 \cdot 9999 + 2$		$30000 = 3 \cdot 9999 + 3$
u. s. f.		u. s. f.		u. s. f.

und endlich die Zahlen 11, 99, 1001, 9999 u. s. f. durch 11 teilbar sind. Es ist z. B.

$$\begin{aligned} 76538 &= 70000 + 6000 + 500 + 30 + 8 \\ &= (7 \cdot 9999 + 7) + (6 \cdot 1001 - 6) + (5 \cdot 99 + 5) + (3 \cdot 11 - 3) + 8 \\ &= (7 \cdot 9999 + 6 \cdot 1001 + 5 \cdot 99 + 3 \cdot 11) + (7 - 6 + 5 - 3 + 8). \end{aligned}$$

Nun ist aber der erste Summand durch 11 teilbar, folglich der ganze Ausdruck oder, was dasselbe ist, die Zahl 76538, sobald der zweite Summand, nämlich $7 - 6 + 5 - 3 + 8 = (7 + 5 + 8) - (6 + 3)$ durch die Zahl 11 teilbar ist.

5. Da $6 = 2 \cdot 3$, $15 = 3 \cdot 5$, $18 = 2 \cdot 9$ u. s. f., so ergibt sich vermöge § 29. 3: Eine Zahl ist durch 6 teilbar, wenn sie sowohl durch 2 als durch 3, sie ist durch 15 teilbar, wenn sie durch 3 und durch 5, sie ist durch 18 teilbar, wenn sie durch 2 und 9 teilbar ist.

6. Für die Teilbarkeit durch die Primzahlen 7, 13 u. s. w. gibt es keine hinreichend einfachen Kennzeichen, weshalb man den Versuch entscheiden lässt.

Aufgabe: Man soll eine 6zifferige Zahl anschreiben, welche durch 72 teilbar ist.

Soll die gesuchte Zahl durch $72 = 8 \cdot 9$ teilbar sein, so muss sie durch 8 und durch 9 (relat. Primzahlen) teilbar sein.

Nun ist eine Zahl durch 8 teilbar, wenn ihre drei letzten Stellen, als Zahl für sich betrachtet, durch 8 teilbar sind; man wählt also etwa die Zahl 416 für diese letzten drei Stellen. Da die gesuchte Zahl 6 Ziffern enthalten soll, so sind nun noch zwei beliebig davor zu setzen, etwa 53416. Da endlich die Zahl durch 9 teilbar sein

soll, so muss die sechste Ziffer so gewählt werden, dass die Quersumme aller Ziffern durch 9 teilbar ist. Nun ist $5 + 3 + 4 + 1 + 6 = 19$, ferner $19 + 8 = 27$ durch 9 teilbar, mithin 8 die sechste Ziffer. Die gesuchte Zahl heisst 853416.

Zerlegung in Primfaktoren.

§ 32.

Jede zusammengesetzte Zahl lässt sich als ein Produkt darstellen, dessen Faktoren lauter Primzahlen sind, und die man daher Primfaktoren nennt.

Ist eine zusammengesetzte Zahl in ein solches Produkt aus Primzahlen verwandelt, so sagt man, sie sei in ihre Primfaktoren zerlegt.

Diese Zerlegung geschieht dadurch, dass man die gegebene Zahl zunächst durch die kleinste Primzahl, welche ein Teiler derselben ist, dividiert, den erhaltenen Quotienten abermals durch seinen kleinsten Primteiler dividiert, und damit so lange fortfährt, bis sich der Quotient 1 ergibt. Die auf solche Weise gefundenen Primteiler sind dann die Primfaktoren der gegebenen Zahl.

Wird bei Ausführung dieser wiederholten Division der Quotient einmal gleich oder kleiner als der letzte Divisor, so gibt es keinen grösseren Primfaktor mehr, welcher in der gegebenen Zahl enthalten ist; z. B.

$ \begin{aligned} 60060 &= 2 \cdot 30030 \\ &= 2 \cdot 2 \cdot 15015 \\ &= 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5005 \\ &= 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 1001 \\ &= 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 143 \\ &= 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \end{aligned} $	oder	$ \begin{aligned} 60060 &: 2 \\ 30030 &: 2 \\ 15015 &: 3 \\ 5005 &: 5 \\ 1001 &: 7 \\ 143 &: 11 \\ 13 &: 13 \\ 1 & \end{aligned} $
---	------	---

$$60060 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$$

Gibt eine zusammengesetzte Zahl durch Zerlegung ein Produkt aus gleichen und ungleichen Faktoren, so schreibt man die Produkte aus gleichen Faktoren als Potenzen an; z. B.

$$4200 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7$$

$$117000 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 13 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^3 \cdot 13.$$

Ist eine Zahl in Primfaktoren zerlegt, so kann man aus diesen alle möglichen einfachen und zusammengesetzten Teiler der gegebenen Zahl finden, indem man nur mit jedem folgenden einfachen alle vorhergehenden einfachen und zusammengesetzten Teiler multipliziert; z. B.

$$4200 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7$$

	1
2	2
2	4
2	8
3	3, 6, 12, 24
5	5, 10, 20, 40, 15, 30, 60, 120
5	25, 50, 100, 200, 75, 150, 300, 600
7	7, 14, 28, 56, 21, 42, 84, 168, 35, 70, 140, 280, 105, 210, 420, 840, 175, 350, 700, 1400, 525, 1050, 2100, 4200.

Der grösste gemeinschaftliche Teiler.

§ 32.

Unter dem grössten gemeinschaftlichen Teiler (g. g. T) zweier oder mehrerer Zahlen versteht man jene grösste Zahl, welche in den gegebenen Zahlen ohne Rest enthalten ist.

Dieser g. g. T. lässt sich durch Division und auch durch Zerlegung der gegebenen Zahlen in Primfaktoren bestimmen.

1. Betrachtet man einen Quotienten $264 : 36 = 7$ mit dem Reste 12, so haben der Rest 12 und der Divisor 36 als g. g. T. die Zahl 12; denn ist eine Zahl durch eine andere teilbar, so ist diese letztere offenbar g. g. T. zu beiden Zahlen. Ist nun die Zahl 12 ein T. von 36, so ist sie auch ein T. von dem Vielfachen $36 \cdot 7$, und endlich auch ein T. der Summe $36 \cdot 7 + 12$ d. i. von 264, weil 12 in jedem Summanden enthalten ist. Mithin ist 12 ein g. T. zu 264 und 36 (§ 29. 4), zugleich aber auch der g. g. T., weil 12 in jedem Summanden der Summe $36 \cdot 7 + 12$ enthalten sein muss und 12 der grösste T. des zweiten Summanden 12 ist. Es folgt demnach:

Bleibt bei der Division einer Zahl durch eine andere ein Rest, so ist der g. g. T. zwischen dem Reste und dem Divisor zugleich g. g. T. zwischen dem Dividenden und dem Divisor.

Lässt sich nach der erstmaligen Division zweier gegebenen Zahlen der g. g. T. zu dem Reste und dem Divisor nicht sogleich erkennen, so dividiert man neuerdings den Divisor durch den Rest, sodann wieder den vorhergehenden Divisor durch den bleibenden Rest, u. s. f. bis einmal der bleibende Rest Teiler des vorhergehenden Divisors wird, der letzte Rest also 0 ist. Alsdann ist nach dem Vorigen der

vorletzte Rest oder der letzte Divisor g. g. T. zu allen vorhergehenden Divisoren und Dividenden, also auch zu den beiden gegebenen Zahlen.

Die auszuführende Division, welche man Kettendivision nennt, beginnt man, indem man die kleinere der gegebenen Zahlen als Divisor wählt.

Ist der letzte Divisor 1, also die Zahl 1 g. g. T. zu den gegebenen Zahlen, so sind dies relative Primzahlen.

Soll z. B. der g. g. T. der Zahlen 38808 und 30240 bestimmt werden, so hat man

$$\begin{array}{rcl}
 30240|38808 = 1 & \text{oder} & 30240 \mid 38808 \mid 1 \\
 8568|30240 = 3 & & 4536 \mid 8568 \mid 3 \\
 4536|8568 = 1 & & 504 \mid 4032 \mid 1 \\
 4032|4536 = 1 & & \underline{\hspace{1cm}} \mid 0 \mid 1 \\
 504|4032 = 8 & & \hspace{1cm} \mid 8 \\
 \underline{\hspace{1cm}} & & \hspace{1cm} \mid 0
 \end{array}$$

Noch eine andere Form der Ausführung ist:

$$\begin{array}{cccccc}
 \overset{1}{\curvearrowright} & \overset{3}{\curvearrowright} & \overset{1}{\curvearrowright} & \overset{1}{\curvearrowright} & \overset{8}{\curvearrowright} & \\
 38808 : 30240 : 8568 : 4536 : 4032 : \underline{504} \\
 8568 & 4536 & 4032 & 504 & 0 &
 \end{array}$$

504 ist der g. g. T. der Zahlen 38808 und 30240.

2. Soll zu mehr als zu zwei Zahlen der g. g. T. angegeben werden, so sucht man denselben zunächst zu irgend zwei (am besten den kleinsten) der gegebenen Zahlen, hierauf zu dem eben gefundenen Teiler und einer dritten Zahl, u. s. f. bis zur letzten der gegebenen Zahlen. Der zuletzt gefundene Teiler ist dann der g. g. T. für sämtliche Zahlen.

Diejenigen von den gegebenen Zahlen, welche Vielfache von einer anderen der gegebenen Zahlen sind, bleiben dabei unberücksichtigt, weil jede Zahl, welche ein T. einer anderen ist, zugleich T. jedes Vielfachen der letzteren Zahl ist.

Ist z. B. zu den Zahlen 3672, 4896, 6732, 7344, 7650 und 33660 der g. g. T. zu bestimmen, so bleiben die Zahlen $7344 = 3672 \cdot 2$ und $33660 = 6732 \cdot 5$ unberücksichtigt und man hat:

$$\begin{array}{rcl}
 3672|4896 = 1 & 1224|6732 = 5 & 612|7650 = 12 \\
 \underline{1224}|3672 = 3 & \underline{612}|1224 = 2 & 1530 \\
 0 & 0 & \underline{306}|612 = 2 \\
 & & 0
 \end{array}$$

Der letzte Teiler 306 ist der g. g. T. für sämtliche Zahlen.

3. Sind die gegebenen Zahlen in ihre Primfaktoren zerlegt, so ergibt sich ihr g. g. T. als das Produkt aus den **niedrigsten** Potenzen derjenigen Primfaktoren, welche in **jeder** der gegebenen Zahlen vorkommen.

Jeder gemeinschaftliche Primfaktor, welcher nur einmal vorkommt, ist als seine erste Potenz zu betrachten; z. B.

$$3672 = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 17$$

$$4896 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 17$$

$$6732 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 11 \cdot 17$$

$$7650 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 17$$

Da nur die Faktoren 2, 3 und 17 in jeder der gegebenen Zahlen vorkommen, so ist

$$\text{g. g. T.} = 2^1 \cdot 3^2 \cdot 17^1 = 2 \cdot 9 \cdot 17 = \mathbf{306}.$$

4. Lassen sich bei kleineren Zahlen die allen Zahlen gemeinschaftlichen Faktoren sogleich erkennen, so scheidet man diese aus und dividiert durch sie die vorliegenden Zahlen. Erhält man sämtliche Quotienten als relative Primzahlen, dann ist das Produkt der ausgeschiedenen Faktoren der g. g. T.; z. B.

$$2 \mid 336, 504, 756, 840, 1176$$

$$2 \mid 168, 252, 378, 420, 588$$

$$3 \mid 84, 126, 189, 210, 294$$

$$7 \mid 28, 42, 63, 70, 98$$

$$4, 6, 9, 10, 14$$

Da 4, 6, 9, 10, 14 relative Primzahlen sind, so ist der

$$\text{g. g. T.} = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7 = \mathbf{84}.$$

Das kleinste gemeinschaftliche Vielfache.

§ 33.

Unter dem kleinsten gemeinschaftlichen Vielfachen (k. g. V.) zweier oder mehrerer Zahlen versteht man jene kleinste Zahl, in welcher alle gegebenen Zahlen ohne Rest enthalten sind.

Das k. g. V. kann mit Hilfe des g. g. T., sowie durch Zerlegung in Primfaktoren bestimmt werden.

1. Hat man zu zwei gegebenen Zahlen den g. g. T. aufgesucht und stellt jede Zahl als ein Produkt dar, dessen einer Faktor dieser g. g. T. ist, so werden die beiden anderen Faktoren relative Primzahlen sein, da alle gemeinschaftlichen Faktoren, welche die beiden Zahlen ausser 1 haben, in dem g. g. T. enthalten sind. Das k. g. V. muss nun einmal diesen g. g. T. und dann die nicht gemeinschaftlichen Faktoren, also die beiden relativen Primzahlen als Faktoren enthalten, und es ergibt sich demnach das k. g. V. der beiden Zahlen als das Produkt aus ihrem g. g. T. und aus den beiden nicht gemeinschaftlichen Faktoren.

Ist z. B. 54 der g. g. T. der Zahlen 486 und 756, so ist $486 = 54 \cdot 9$ und $756 = 54 \cdot 14$, folglich das

$$\text{k. g. V.} = 54 \cdot 9 \cdot 14 = 756 \cdot 9 = \mathbf{6804}.$$

Nun ist aber $9 = 486 : 54$, folglich kann man statt $756 \cdot 9$ auch schreiben $756 \cdot (486 : 54)$ d. h. man erhält auch das k. g. V. zweier Zahlen, indem man eine der Zahlen (am besten die kleinere) durch den g. g. T. beider Zahlen dividiert und mit dem erhaltenen Quotienten die andere Zahl multipliziert.

2. Ist zu mehr als zwei Zahlen das k. g. V. anzugeben, so sucht man dasselbe zunächst zu zwei beliebigen der gegebenen Zahlen, hierauf zu dem eben gefundenen k. g. V. und einer dritten Zahl, u. s. f. bis zur letzten der gegebenen Zahlen. Das zuletzt gefundene Vielfache ist dann das k. g. V. sämtlicher Zahlen.

Diejenigen von den gegebenen Zahlen, welche Teiler von einer oder mehreren der anderen sind, bleiben dabei unberücksichtigt, weil jede Zahl, welche ein Vielfaches einer anderen Zahl ist, auch ein Vielfaches eines jeden Teilers dieser letzteren Zahl ist.

Soll z. B. zu den Zahlen 1320, 1680, 3960, 4158, 4200, 4950 und 8316 das k. g. V. bestimmt werden, so bleiben die Zahlen $1320 = 3960 : 3$ und $4158 = 8316 : 2$ unberücksichtigt, und man hat

$$\begin{array}{rcccccc} & 1680 & 3960 & 4200 & 4950 & 8316 \\ \text{k. g. V.} = & \overbrace{55440} & & & & \\ & \underbrace{} & & & & \\ & \text{k. g. V.} = & 277200 & & & \\ & & \underbrace{} & & & \\ & & \text{k. g. V.} = & 277200 & & \\ & & & \underbrace{} & & \\ & & & \text{k. g. V.} = & 831600 & \end{array}$$

Mithin ist **831600** das k. g. V. sämtlicher Zahlen.

3. Sind die gegebenen Zahlen in ihre Primfaktoren zerlegt, so ergibt sich ihr k. g. V. als das Produkt aus den **höchsten** Potenzen **aller überhaupt** in den gegebenen Zahlen vorkommenden Primfaktoren; z. B.

$$\left. \begin{array}{l} 1680 = 2^4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \\ 3960 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 11 \\ 4200 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7 \\ 4950 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 11 \\ 8316 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 7 \cdot 11 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{k. g. V.} = 2^4 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11 \\ \phantom{\text{k. g. V.}} = 16 \cdot 27 \cdot 25 \cdot 7 \cdot 11 \\ \phantom{\text{k. g. V.}} = \mathbf{831600}. \end{array}$$

4. Sind die gegebenen Zahlen nicht sehr gross, so kann

man auch zuerst alle diejenigen Primfaktoren ausscheiden, welche in wenigstens zwei der gegebenen Zahlen enthalten sind. Mit diesen ausgeschiedenen Faktoren dividiert man, und schreibt neben die erhaltenen Quotienten alle nicht teilbaren Zahlen unverändert wieder an. Die zuletzt erhaltenen Quotienten, von denen keine zwei mehr einen g. T. haben, geben, mit den ausgeschiedenen Faktoren multipliziert, das k. g. V. sämtlicher Zahlen; z. B.

2	12, 15, 16, 18, 20, 28, 30, 35, 40
2	6, 8, 9, 14, 15, 35, 20
2	3, 4, 9, 7, 15, 35, 10
3	3, 2, 9, 7, 15, 35, 5
5	1, 2, 3, 7, 5, 35, 5
7	2, 3, 7, 1, 7, 1
	2, 3, 1, 1,

k. g. V. = $2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 = 5040$.

Die Zahlen 15 und 20 bleiben unberücksichtigt, da sie Teiler von den gegebenen Zahlen 30 und 40 sind.

Wenn sich solche Teiler während des Ausscheidens der Faktoren ergeben, so kann man dieselben ebenfalls sogleich weglassen, also:

2	12, 15, 16, 18, 20, 28, 30, 35, 40
2	6, 8, 9, 14, 15, 35, 20
2	3, 4, 9, 7, 15, 35, 10
3	2, 9, 15, 35, 5
	2, 3, 5, 35,

Von den Quotienten 2, 3, 35 haben keine zwei mehr einen g. T., demnach k. g. V. = $2 \cdot 3 \cdot 35 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 35 = 5040$.

5. Ist eine Zahl durch mehrere zusammengesetzte Zahlen teilbar, so ist sie auch teilbar durch das k. g. V. der gegebenen Zahlen, z. B. die Zahl 1440 ist durch 36, 80, 120 teilbar, folglich, da $36 = 2^2 \cdot 3^2$, $80 = 2^4 \cdot 5$, $120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$, ist 1440 teilbar durch das k. g. V. = $2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 = 720$ (nicht etwa durch $36 \cdot 80 \cdot 120$, vergl. § 29. 3).

IV. Die gemeinen Brüche.

Allgemeine Eigenschaften der Brüche.

§ 34.

1. Wird eine Einheit in mehrere gleiche Teile geteilt, so erhalten einer oder mehrere solcher gleicher Teile den

Die eigentlichen Brüche unterscheidet man wieder in echte, wenn der Zähler kleiner ist als der

Nenner, z. B. $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{9}$, und

unechte, wenn der Zähler grösser ist als der

Nenner, z. B. $\frac{5}{2}$, $\frac{7}{4}$, $\frac{37}{12}$.

3. Jede Zahl durch sich selbst dividiert gibt als Quotienten 1; oder jeder Bruch, dessen Zähler dem Nenner gleich ist, hat den Wert 1. Also

$$\frac{2}{2} = \frac{3}{3} = \frac{8}{8} = \frac{15}{15} = 1.$$

Ueberhaupt ist jeder uneigentliche Bruch seinem Werte nach eine ganze Zahl; z. B. $\frac{12}{4} = 3$; $\frac{25}{5} = 5$.

Jede Zahl lässt sich umgekehrt als ein Bruch betrachten, dessen Nenner 1 ist; z. B. $7 = \frac{7}{1}$, $18 = \frac{18}{1}$.

Jede ganze Zahl lässt sich ferner in einen uneigentlichen Bruch verwandeln, dessen Nenner eine beliebige Zahl und dessen Zähler dann das Produkt aus der gegebenen Zahl und aus dem gewählten Nenner ist; z. B.

$$6 = \frac{6 \cdot 3}{3} = \frac{18}{3}; 6 = \frac{6 \cdot 4}{4} = \frac{24}{4}; 13 = \frac{13 \cdot 7}{7} = \frac{91}{7}.$$

4. Jeder echte Bruch ist seinem Werte nach kleiner als 1; denn da der Zähler kleiner ist als der Nenner, so enthält der Bruch weniger Teile, als deren die Einheit enthält. $\frac{5}{7} < 1$, weil $\frac{5}{7}$ nur 5 Siebentel, 1 aber 7 Siebentel enthält.

Jeder unechte Bruch dagegen ist grösser als 1; denn da sein Zähler grösser ist als sein Nenner, so enthält der Bruch mehr Teile, als solche die Einheit enthält. $\frac{12}{7} > 1$.

5. Jeder unechte Bruch lässt sich als eine Summe darstellen aus einer ganzen Zahl und einem echten Bruch, wenn man den Zähler wirklich durch den Nenner dividiert, und den sich ergebenden Rest als Zähler des echten Bruches nimmt; z. B.

$$\frac{35}{8} = 4 + \frac{3}{8}; \frac{91}{12} = 7 + \frac{7}{12}.$$

Eine solche Summe aus einer ganzen Zahl und

einem echten Bruche heist eine gemischte Zahl und wird gewöhnlich ohne Additionszeichen geschrieben; also

$$4 + \frac{3}{8} = 4 \frac{3}{8}, \quad 7 + \frac{7}{12} = 7 \frac{7}{12}.$$

Umgekehrt lässt sich jede gemischte Zahl in einen unechten Bruch verwandeln, dessen Zähler erhalten wird, wenn man die ganze Zahl mit dem Nenner des Bruches multipliziert und zu dem Produkte den Zähler addiert; der Nenner wird beibehalten; z. B.

$$6 \frac{3}{4} = \frac{6 \cdot 4 + 3}{4} = \frac{27}{4}; \quad 17 \frac{5}{12} = \frac{17 \cdot 12 + 5}{12} = \frac{209}{12}.$$

Veränderung des Wertes und der Form der Brüche.

§ 35.

1. Da der Zähler eines Bruches die Anzahl der vorhandenen Teile bestimmt, der Nenner aber diesen Teilen nur den Namen gibt, so ist in einem Bruche auch der Zähler die eigentliche Zahl, welche die Grösse des Bruches bestimmt, und jede Vergrösserung des Bruches (durch Addition oder Multiplikation), sowie jede Verkleinerung desselben (durch Subtraktion oder Division) wird daher zunächst an dem Zähler vorgenommen werden müssen.

Ein Bruch wird also seinem Werte nach grösser, wenn sein Zähler grösser gemacht wird.

Weil aber ferner der Nenner den Wert eines jeden einzelnen der durch den Zähler ausgedrückten Anzahl der Teile bestimmt, so wird der Wert eines Bruches auch durch Veränderung des Nenners geändert. Vergrössert man nämlich den Nenner eines Bruches, so wird die Einheit dadurch in mehr Teile geteilt, jeder einzelne Teil wird also kleiner, und mithin der Wert des Bruches verkleinert. Wenn man aber den Nenner eines Bruches verkleinert, so erscheint die Einheit in weniger Teilen geteilt, wodurch der Wert jedes einzelnen Teiles, folglich auch der des ganzen Bruches vergrössert wird.

Ein Bruch wird also seinem Werte nach grösser, wenn sein Nenner kleiner gemacht wird.

2. Multipliziert man den Zähler eines Bruches mit irgend einer Zahl, so wird der Bruch eben so vielmal grösser, als diese Zahl angibt; multipliziert man nun auch den Nenner des erhaltenen Bruches mit derselben Zahl, so wird der Bruch wieder eben so vielmal kleiner, mithin ist der neue Bruch gleich dem ursprünglichen.

Dividiert man aber den Zähler eines Bruches durch eine Zahl, so verringert man zwar die Anzahl der Teile, dividiert

man jedoch auch den Nenner durch dieselbe Zahl, so vergrößert man zugleich den Wert jedes einzelnen Teiles in demselben Verhältnisse, und der neue Bruch ist ebenfalls gleich dem ursprünglichen, er hat nur seine Form verändert, ohne zugleich seinen Wert zu ändern.

Hieraus folgt nun: Ein Bruch bleibt seinem Werte nach unverändert, wenn man Zähler **und** Nenner desselben zugleich mit der nämlichen Zahl multipliziert oder durch die nämliche Zahl dividiert (vergleiche § 15. h.); z. B.

$$\frac{2}{3} = \frac{2 \cdot 8}{3 \cdot 8} = \frac{16}{24}; \quad \frac{9}{12} = \frac{9 : 3}{12 : 3} = \frac{3}{4}.$$

Erweitern und Vereinfachen der Brüche.

§ 36.

1. Einen Bruch **erweitern** heisst Zähler und Nenner desselben mit der nämlichen Zahl multiplizieren.

Durch das Erweitern lässt sich jeder Bruch in einen andern verwandeln, dessen Nenner ein Vielfaches von dem Nenner des gegebenen Bruches ist. Soll z. B. $\frac{9}{14}$ in einen Bruch verwandelt werden, dessen Nenner 70 ist, so hat man, weil $70 = 14 \cdot 5$, Zähler und Nenner mit 5 zu multiplizieren,

$$\text{also } \frac{9}{14} = \frac{9 \cdot 5}{14 \cdot 5} = \frac{45}{70}.$$

Zähler und Nenner des gegebenen Bruches sind also nur mit dem Quotienten aus dem gewählten Nenner und dem Nenner des gegebenen Bruches zu multiplizieren. (Vergl. § 42. 6).

2. Einen Bruch **vereinfachen** (reduzieren) heisst Zähler und Nenner desselben durch die nämliche Zahl dividieren.

Das Vereinfachen der Brüche setzt voraus, dass Zähler und Nenner einen g. T. haben.

Ein Bruch ist auf seine einfachste Form gebracht, wenn Zähler und Nenner relative Primzahlen sind. Man erhält diese einfachste Form, wenn man Zähler und Nenner durch ihren g. g. T. dividiert. Ist z. B. der Bruch $\frac{2456}{4605}$ auf die einfachste Form zu bringen, so hat man

$$\text{g. g. T.} = 307; \text{ folglich } \frac{2456}{4605} = \frac{2456 : 307}{4605 : 307} = \frac{8}{15}.$$

Erkennt man sogleich kleinere g. T. des Zählers und Nenners, so kann man durch diese der Reihe nach dividieren und so allmählich zum Ziele gelangen; z. B.

$$\frac{74250}{198000} \xrightarrow{10} \frac{7425}{19800} \xrightarrow{25} \frac{207}{792} \xrightarrow{9} \frac{33}{88} \xrightarrow{11} \frac{3}{8}.$$

Vergleichung der Brüche in bezug auf ihre Grösse.

§ 37.

Da nach § 35. 1 ein Bruch seinem Werte nach grösser wird durch Vergrösserung seines Zählers, oder auch durch Verkleinerung seines Nenners, so folgt:

Von zwei Brüchen mit gleichen Nennern ist derjenige der grössere, welcher den grösseren Zähler hat,

$$\frac{14}{15} > \frac{11}{15} \text{ oder } \frac{11}{15} < \frac{14}{15};$$

von zwei Brüchen mit gleichen Zählern ist derjenige der grössere, welcher den kleineren Nenner hat,

$$\frac{7}{9} > \frac{7}{12} \text{ oder } \frac{7}{12} < \frac{7}{9}.$$

Will man Brüche mit einander vergleichen, welche verschiedene Nenner und verschiedene Zähler haben, so verwandelt man dieselben in Brüche mit gleichen Nennern oder mit gleichen Zählern. Gewöhnlich verwandelt man die Brüche in solche mit gleichen Nennern oder macht dieselben gleichnamig (man sagt auch: die Brüche auf gleichen Nenner oder auf gleiche Benennung bringen).

Es geschieht dies dadurch, dass man zu den Nennern der gegebenen Brüche das k. g. V. sucht, welches der gemeinschaftliche oder Haupt- (General-) Nenner sämtlicher Brüche wird. Durch Erweitern verwandelt man dann die gegebenen Brüche in solche, welche als Nenner den gefundenen gemeinschaftlichen Nenner haben.

Sind z. B. die Brüche $\frac{3}{4}$, $\frac{7}{10}$, $\frac{13}{15}$, $\frac{11}{18}$ nach ihrer Grösse zu ordnen, so hat man:

k. g. V. zu 4, 10, 15, 18, ist 180.

$$\begin{array}{lcl} 180 : 4 = 45, & \text{folglich} & \frac{3}{4} = \frac{3 \cdot 45}{4 \cdot 45} = \frac{135}{180} \\ 180 : 10 = 18, & \text{„} & \frac{7}{10} = \frac{7 \cdot 18}{10 \cdot 18} = \frac{126}{180} \\ 180 : 15 = 12, & \text{„} & \frac{13}{15} = \frac{13 \cdot 12}{15 \cdot 12} = \frac{156}{180} \\ 180 : 18 = 10, & \text{„} & \frac{11}{18} = \frac{11 \cdot 10}{18 \cdot 10} = \frac{110}{180} \end{array}$$

$$\text{Nun ist aber } \frac{156}{180} > \frac{135}{180} > \frac{126}{180} > \frac{110}{180},$$

$$\text{folglich } \frac{13}{15} > \frac{3}{4} > \frac{7}{10} > \frac{11}{18}.$$

Addition und Zerlegung der Brüche.

§ 38.

1. Haben Brüche gleiche Nenner, so sind die Teile, in welche bei jedem die Einheit geteilt worden ist, einander gleich, und man kann die Brüche addieren, indem man durch Addition der Zähler die Anzahl aller dieser Teile bestimmt.

Demnach werden Brüche mit gleichen Nennern, oder gleichnamige Brüche, addiert, indem man die Summe ihrer Zähler durch den gemeinschaftlichen Nenner dividiert.

$$\frac{3}{11} + \frac{7}{11} + \frac{5}{11} + \frac{1}{11} + \frac{6}{11} = \frac{3 + 7 + 5 + 1 + 6}{11} = \frac{22}{11} = 2.$$

Brüche mit verschiedenen Nennern müssen zuvor gleichnamig gemacht werden; z. B.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \frac{4}{9} + \frac{7}{18} + \frac{7}{24} + \frac{5}{72} + \frac{5}{36} \\ = \frac{36 + 54 + 32 + 28 + 21 + 5 + 10}{72} \\ = \frac{186}{72} = 2\frac{42}{72} = 2\frac{7}{12}. \end{aligned}$$

2. Gemischte Zahlen (also Summen aus ganzen Zahlen und echten Brüchen) werden addiert, indem man zur Summe der ganzen Zahlen die Summe der echten Brüche addiert; z. B.

$$\begin{aligned} 123\frac{1}{2} + 6\frac{7}{30} + 17\frac{3}{5} + 9 + 1\frac{4}{15} + \frac{27}{70} + 5\frac{3}{10} \\ = 161 + \frac{105 + 49 + 126 + 56 + 81 + 63}{210} \\ = 161 + \frac{480}{210} = 161 + 2\frac{60}{210} = 163\frac{60}{210} = 163\frac{2}{7}. \end{aligned}$$

3. Es ist mitunter vorteilhaft, einen Bruch mit grösserem Zähler und Nenner in mehrere einfachere Brüche zu zerlegen, d. h. als eine Summe aus einfacheren Brüchen darzustellen, deren Zähler 1 und deren Nenner (oft nur mit Ausnahme des letzten) Teiler des gegebenen Nenners oder wenigstens kleiner als dieser sind. Man hat dabei nur den Zähler in solche Summanden zu zerlegen, welche Teiler des Nenners sind, und die erhaltenen einzelnen Brüche sodann zu vereinfachen; z. B.

$$\begin{aligned} \frac{109}{128} &= \frac{64 + 32 + 8 + 4 + 1}{128} = \frac{64}{128} + \frac{32}{128} + \frac{8}{128} + \frac{4}{128} + \frac{1}{128} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{128}; \\ \frac{68}{105} &= \frac{35 + 21 + 7 + 5}{3 \cdot 5 \cdot 7} = \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{15} + \frac{1}{21}; \\ \frac{82}{105} &= \frac{52\frac{1}{2} + 26\frac{1}{4} + 3 + \frac{1}{4}}{105} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{35} + \frac{1}{420}. \end{aligned}$$

Subtraktion der Brüche.

§ 39.

1. Sind Brüche gleichnamig oder gleichnamig gemacht, so werden dieselben von einander subtrahiert, indem man die Differenz ihrer Zähler durch den gemeinschaftlichen Nenner dividiert; z. B.

$$\frac{11}{13} - \frac{7}{13} = \frac{11-7}{13} = \frac{4}{13};$$

$$\frac{19}{24} - \frac{31}{60} = \frac{95}{120} - \frac{62}{120} = \frac{33}{120} = \frac{11}{40}.$$

2. Sind gemischte Zahlen von einander zu subtrahieren, so addiert man zu der Differenz der ganzen Zahlen die Differenz der echten Brüche. Hierbei kann es vorkommen, dass der Minuend entweder keinen, oder einen kleineren Bruch enthält als der Subtrahend; in diesem Falle nimmt man von den Ganzen des Minuenden eine Einheit und zerlegt dieselbe in gebrochene Einheiten; z. B.

$$8\frac{53}{60} - 5\frac{19}{48} = (8 - 5) + \frac{212}{240} - \frac{95}{240} = 3 + \frac{117}{240} = 3\frac{39}{80};$$

$$17\frac{17}{36} - 9 = (17 - 9) + \left(\frac{17}{36} - 0\right) = 8\frac{17}{36};$$

$$6 - 2\frac{13}{16} = 4 + \frac{0}{16} - \frac{13}{16} = 3 + \frac{16}{16} - \frac{13}{16} = 3 + \frac{3}{16} = 3\frac{3}{16},$$

kürzer: $= 5\frac{16}{16} - 2\frac{13}{16} = 3\frac{3}{16};$

$$24\frac{5}{24} - 8\frac{27}{32} = 16 + \frac{20}{96} - \frac{81}{96} = 15 + \frac{116}{96} - \frac{81}{96} = 15\frac{35}{96},$$

kürzer: $= 16' + \frac{116}{96} - \frac{81}{96} = 15\frac{35}{96}.$

3. Sind Brüche oder gemischte Zahlen teils zu addieren, teils zu subtrahieren, so verfährt man wie bei ganzen Zahlen, indem man von der Summe der positiven Glieder die Summe der negativen subtrahiert; z. B.

$$\frac{3}{8} + \frac{5}{6} - \frac{7}{10} + \frac{1}{2} - \frac{5}{12} - \frac{7}{18}$$

$$= \left(\frac{3}{8} + \frac{5}{6} + \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{7}{10} + \frac{5}{12} + \frac{7}{18}\right)$$

$$= \frac{9}{24} + \frac{20}{24} + \frac{12}{24} - \frac{126}{360} - \frac{75}{360} - \frac{70}{360}$$

$$= \frac{41}{24} - \frac{271}{180} = \frac{615}{360} - \frac{542}{360} = \frac{73}{360};$$

oder auch:

$$\begin{aligned}
 & 6\frac{3}{4} - 2\frac{2}{3} + 17\frac{5}{9} - \frac{5}{6} - 4\frac{1}{2} - 8\frac{1}{6} + \frac{7}{36} \\
 &= 9 + \frac{27 - 24 + 20 - 30 - 18 - 6 + 7}{36} \\
 &= 9 + \frac{90}{36} - \frac{78}{36} = 8\frac{12}{36} = 8\frac{1}{3}.
 \end{aligned}$$

Multiplikation der Brüche mit ganzen Zahlen.

§ 40.

1. Da der Wert eines Bruches ebensovielmals grösser wird, sovielmals man entweder seinen Zähler vergrössert oder seinen Nenner verkleinert hat, so folgt:

Ein Bruch wird mit einer ganzen Zahl multipliziert, indem man entweder seinen Zähler mit der ganzen Zahl multipliziert und den Nenner beibehält, oder seinen Nenner durch die ganze Zahl dividiert und den Zähler beibehält.

Haben der Nenner des Bruches und die ganze Zahl einen g. T., so dividiert man zuvor durch denselben; z. B.

$$\begin{aligned}
 \frac{5}{6} \cdot 7 &= \frac{5 \cdot 7}{6} = \frac{35}{6} = 5\frac{5}{6}; \\
 \frac{19}{24} \cdot 8 &= \frac{19}{24:8} = \frac{19}{3} = 6\frac{1}{3}; \\
 \frac{19}{32} \cdot 24 &= \frac{19}{4 \cdot 8} \cdot (3 \cdot 8) = \frac{19}{4} \cdot 3 = \frac{57}{4} = 14\frac{1}{4}; \\
 \frac{11}{24} \cdot 36 &= \frac{33}{2} = 16\frac{1}{2}.
 \end{aligned}$$

Anmerk. Es ist $\frac{19}{24} \cdot 4 = \frac{19}{24} + \frac{19}{24} + \frac{19}{24} + \frac{19}{24} = \frac{19 + 19 + 19 + 19}{24}$
 $= \frac{19 \cdot 4}{24} = \frac{(19 \cdot 4):4}{24:4} = \frac{19}{24:4}$

2. Soll eine gemischte Zahl (also eine Summe) mit einer ganzen Zahl multipliziert werden, so multipliziert man sowohl die Ganzen als auch den echten Bruch mit der Zahl und addiert die erhaltenen Produkte; z. B.

$$\begin{aligned}
 3\frac{4}{7} \cdot 5 &= 15 + \frac{20}{7} = 15 + 2\frac{6}{7} = 17\frac{6}{7}; \\
 12\frac{11}{12} \cdot 8 &= 96 + \frac{11}{3} \cdot 2 = 96 + \frac{22}{3} = 103\frac{1}{3}.
 \end{aligned}$$

Dasselbe Resultat erhält man natürlich, wenn man vor der Ausführung der Multiplikation die gemischte Zahl in einen unechten Bruch verwandelt. Doch ist dies Verfahren nur

dann von Vorteil, wenn der Nenner des Bruches und der Multiplikator einen sehr grossen g. T. haben; z. B.

$$394\frac{35}{48} \cdot 112 = \frac{18947}{48} \cdot 112 = \frac{132629}{3} = 44209\frac{2}{3}.$$

Division der Brüche durch ganze Zahlen.

§ 41.

1. Da der Wert eines Bruches ebensovielmal kleiner wird, sovielmal man entweder seinen Zähler verkleinert oder seinen Nenner vergrössert, so folgt:

Ein Bruch wird durch eine ganze Zahl dividiert, indem man entweder seinen Zähler durch die ganze Zahl dividiert und den Nenner beibehält, oder seinen Nenner mit der ganzen Zahl multipliziert und den Zähler beibehält.

Haben der Zähler des Bruches und die ganze Zahl einen g. T., so dividiert man zuvor durch denselben; z. B.

$$\frac{18}{7} : 6 = \frac{18 : 6}{7} = \frac{3}{7}; \quad \frac{12}{5} : 7 = \frac{12}{5 \cdot 7} = \frac{12}{35};$$

$$\frac{36}{11} : 27 = \frac{4 \cdot 9}{11} : (3 \cdot 9) = \frac{4}{11} : 3 = \frac{4}{33};$$

$$\frac{45}{4} : 10 = \frac{9}{8} = 1\frac{1}{8}.$$

2. Soll eine gemischte Zahl (also eine Summe) durch eine ganze Zahl dividiert werden, so dividiert man zunächst die Ganzen; ergibt sich hierbei ein Rest, so wird derselbe nebst dem echten Bruche in einen unechten Bruch verwandelt und dieser dann durch die Zahl dividiert; z. B.

$$28\frac{14}{27} : 7 = 28 : 7 + \frac{14}{27} : 7 = 4 + \frac{2}{27} = 4\frac{2}{27};$$

$$137\frac{1}{3} : 12 = 11 + 5\frac{1}{3} : 12 = 11 + \frac{16}{3} : 12 = 11 + \frac{4}{9} = 11\frac{4}{9}.$$

Ist der Divisor grösser als die Anzahl Ganze, welche die gemischte Zahl enthält, so verwandelt man die gemischte Zahl sogleich in einen unechten Bruch. Eben dieses kann man natürlich überhaupt mit jeder gemischten Zahl zuvor thun; z. B.

$$3\frac{3}{7} : 16 = \frac{24}{7} : 16 = \frac{3}{14};$$

$$930\frac{6}{13} : 128 = \frac{12096}{13} : 128 = \frac{189}{13} : 16 = \frac{189}{208} = 7\frac{7}{26}.$$

Multiplikation mit Brüchen.

§ 42.

1. Für die Multiplikation mit einem Bruche gilt die Erklärung über Multiplikation mit einer ganzen Zahl nicht. Denn soll der Bruch $\frac{3}{5}$ mit dem Bruche $\frac{4}{7}$ multipliziert werden, so kann dies nicht bedeuten, man soll $\frac{3}{5}$ vier siebenbentelmal als Summanden setzen, was ja keinen Sinn hat. Es enthält vielmehr die Multiplikation mit einem Bruche zwei Operationen, eine Multiplikation mit seinem Zähler **und** eine Division durch seinen Nenner. Multipliziert man, um $\frac{3}{5} \cdot \frac{4}{7}$ auszuführen, den Bruch $\frac{3}{5}$ zunächst nur mit 4, so ist der erhaltene Bruch $\frac{3 \cdot 4}{5}$ siebenmal zu gross, da ja nicht mit 4, sondern mit dem 7. Teile von 4 multipliziert werden soll. Es ist mithin von dem Bruche $\frac{3 \cdot 4}{5}$ noch der 7. Teil zu nehmen, d. h. derselbe ist durch 7 zu dividieren, was dadurch geschehen kann, dass man unter Beibehaltung des Zählers seinen Nenner mit 7 multipliziert. Man erhält daher $\frac{3}{5} \cdot \frac{4}{7} = \frac{3 \cdot 4}{5 \cdot 7} = \frac{12}{35}$. Hieraus folgt: Zwei (oder auch mehrere) Brüche werden mit einander multipliziert, indem man das Produkt ihrer Zähler durch das Produkt ihrer Nenner dividiert.

Anmerk. Die folgende Ableitung ist in Worten auszuführen, indem man zunächst $\frac{4}{7}$ als ganze Zahl betrachtet.

$$\frac{3}{5} \cdot \frac{4}{7} = \frac{3 \cdot 4}{5} = \frac{4 \cdot 3}{5} = \frac{4 \cdot 3}{7} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 7}{7} = \frac{4 \cdot 3}{5 \cdot 7} = \frac{3 \cdot 4}{5 \cdot 7}.$$

2. Beachte, dass der Wert einer Zahl kleiner wird, wenn sie mit einem echten Bruche, dagegen grösser, wenn sie mit einem unechten Bruche multipliziert wird. Z. B.

$$12 \cdot \frac{3}{4} = 9; \text{ aber } 12 \cdot \frac{4}{3} = 16.$$

3. Hat bei der Multiplikation von Brüchen mit einander der Zähler eines Bruches mit dem Nenner eines anderen einen g. T., so kann man zunächst durch diesen g. T. dividieren und dadurch die Rechnung vereinfachen; z. B.

$$\frac{34}{45} \cdot \frac{27}{85} = \frac{2 \cdot 17}{5 \cdot 9} \cdot \frac{3 \cdot 9}{5 \cdot 17} = \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{6}{25}.$$

$$\frac{\overset{2}{6}}{\underset{7}{35}} \cdot \frac{\overset{5}{25}}{\underset{3}{39}} \cdot \frac{\overset{2}{26}}{\underset{3}{25}} \cdot \frac{\overset{1}{15}}{\underset{4}{16}} = \frac{5}{7 \cdot 3 \cdot 4} = \frac{5}{84}.$$

4. Gemischte Zahlen verwandelt man am besten in unechte Brüche:

$$3\frac{3}{7} \cdot 2\frac{3}{16} = \frac{24}{7} \cdot \frac{35}{16} = \frac{3 \cdot 5}{2} = \frac{15}{2} = 7\frac{1}{2}.$$

$$2\frac{8}{11} \cdot 8\frac{4}{5} = \frac{30}{11} \cdot \frac{44}{5} = 6 \cdot 4 = 24.$$

$$12 \cdot 3\frac{1}{8} = \frac{12}{1} \cdot \frac{25}{8} = \frac{3 \cdot 25}{1 \cdot 2} = \frac{75}{2} = 37\frac{1}{2};$$

oder nach § 40. 2, indem man die Faktoren vertauscht,

$$12 \cdot 3\frac{1}{8} = 36 + \frac{3}{2} = 37\frac{1}{2}.$$

$$3\frac{3}{4} \cdot 12 \cdot 1\frac{3}{8} \cdot \frac{7}{25} \cdot 1\frac{3}{7} = \frac{15 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 7 \cdot 10}{4 \cdot 1 \cdot 8 \cdot 25 \cdot 7} \Big| \frac{3 \cdot 3 \cdot 5}{5 \cdot 4} = \frac{11 \cdot 3 \cdot 3}{4} = \frac{99}{4} = 24\frac{3}{4}.$$

5. Ist das Produkt zweier Zahlen gleich 1, so nennt man die eine Zahl den reziproken Wert der andern. Z. B.

$$5 \cdot \frac{1}{5} = 1, \quad \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{3} = 1.$$

Der reziproke Wert von 5 ist daher $\frac{1}{5} (1 : 5)$

$$,, \quad ,, \quad ,, \quad ,, \quad \frac{1}{5} \quad ,, \quad ,, \quad 5 (1 : \frac{1}{5})$$

$$,, \quad ,, \quad ,, \quad ,, \quad \frac{3}{4} \quad ,, \quad ,, \quad \frac{4}{3} (1 : \frac{3}{4})$$

$$,, \quad ,, \quad ,, \quad ,, \quad \frac{4}{3} \quad ,, \quad ,, \quad \frac{3}{4} (1 : \frac{4}{3})$$

Unter dem reziproken Wert einer Zahl versteht man also jene Zahl, mit welcher man die gegebene Zahl multiplizieren muss, um als Produkt 1 zu erhalten; oder es ist der reziproke Wert einer Zahl gleich dem Quotienten aus der Zahl 1 und aus der gegebenen Zahl. Als reziproker Wert eines Bruches ergibt sich einfach der umgestürzte Bruch.

6. Nach § 36. 1 kann man durch das Erweitern einem Bruche jeden beliebigen Nenner verschaffen. Soll z. B. der Bruch $\frac{7}{12}$ den Nenner 20 erhalten, so hat man, um den Nenner 12 fortzuschaffen, Zähler und Nenner durch 12 zu dividieren; um ferner als Nenner 20 zu erhalten, ist Zähler und Nenner mit 20 zu multiplizieren. Es ist daher Zähler

und Nenner des Bruches $\frac{7}{12}$ mit $\frac{20}{12}$ zu multiplizieren und man hat

$$\frac{7}{12} = \frac{7 \cdot \frac{20}{12}}{12 \cdot \frac{12}{12}} = \frac{7 \cdot \frac{5}{3}}{20} = \frac{11\frac{2}{3}}{20}.$$

Division durch Brüche.

§ 43.

1. Die Division durch einen Bruch enthält ebenso wie die Multiplikation mit einem Bruche zwei Operationen, nämlich eine Division durch den Zähler **und** eine Multiplikation mit dem Nenner des Bruches. Dividiert man, um $\frac{5}{7} : \frac{3}{4}$ auszuführen, den Bruch $\frac{5}{7}$ zunächst durch 3, so ist

der erhaltene Bruch $\frac{5}{7 \cdot 3}$ viermal zu klein, da ja nicht durch 3, sondern durch den 4. Teil von 3 dividiert werden soll, also mit einer 4mal zu grossen Zahl dividiert worden ist. Der Bruch $\frac{5}{7 \cdot 3}$ ist mithin noch 4mal grösser zu nehmen, d. h.

mit 4 zu multiplizieren; dies gibt $\frac{5}{7 \cdot 3} \cdot 4 = \frac{5 \cdot 4}{7 \cdot 3}$, so dass

$\frac{5}{7} : \frac{3}{4} = \frac{5 \cdot 4}{7 \cdot 3} = \frac{20}{21}$ d. h. Zwei Brüche werden durch einander dividiert, indem man das Produkt aus dem Zähler des Dividenden und dem Nenner des Divisor dividiert durch das Produkt aus dem Nenner des Dividenden und dem Zähler des Divisor.

Anmerkung. Die folgende Ableitung ist in Worten auszuführen, indem man zunächst $\frac{3}{4}$ als ganze Zahl betrachtet.

$$\frac{5}{7} : \frac{3}{4} = \frac{5}{7 \cdot \frac{3}{4}} = \frac{5}{\frac{7 \cdot 3}{4}} = \frac{5 \cdot 4}{\frac{7 \cdot 3}{4} \cdot 4} = \frac{5 \cdot 4}{7 \cdot 3}$$

2. Beachte, dass der Wert einer Zahl grösser wird, wenn sie durch einen echten Bruch, dagegen kleiner, wenn sie durch einen unechten Bruch dividiert wird. Z. B.

$$15 : \frac{3}{5} = 25; \text{ aber } 15 : \frac{5}{3} = 9.$$

3. Da $\frac{5}{7} : \frac{3}{4} = \frac{5 \cdot 4}{7 \cdot 3} = \frac{5}{7} \cdot \frac{4}{3}$, so folgt:

Statt durch einen Bruch zu dividieren, kann man auch mit dem reziproken Werte des Bruches (also dem umgestürzten Bruche) multiplizieren.

4. Haben die beiden Zähler oder die beiden Nenner einen g. T., so kann man zunächst durch diesen g. T. dividieren und dadurch die Rechnung vereinfachen; z. B.

$$\frac{8}{21} : \frac{12}{35} = \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 7} : \frac{3 \cdot 4}{5 \cdot 7} = \frac{2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 7}{3 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 4} = \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 3} = \frac{10}{9} = 1\frac{1}{9}.$$

$$\frac{\overset{4}{24}}{\underset{5}{25}} : \frac{\overset{3}{18}}{\underset{11}{55}} = \frac{4 \cdot 11}{5 \cdot 3} = \frac{44}{15} = 2\frac{14}{15}.$$

5. Die Division zweier Brüche durch einander kann auch in folgender Weise vorgenommen werden. Es ist

$$\frac{16}{45} : \frac{8}{9} = \frac{16 \cdot 9}{45 \cdot 8} = \frac{16 \cdot 9}{8 \cdot 45} = \frac{16}{8} \cdot \frac{9}{45} = \frac{16}{8} : \frac{45}{9} = \frac{16 : 8}{45 : 9} = \frac{2}{5},$$

d. h. zwei Brüche werden durch einander dividiert, indem man den Quotienten aus ihren Zählern dividiert durch den Quotienten aus ihren Nennern.

Dieses Verfahren ist immer mit Vorteil anzuwenden, wenn Zähler und Nenner des Divisor bezüglich Teiler sind vom Zähler und Nenner des Dividenden, ferner in folgenden besonderen Fällen:

$\frac{14}{27} : \frac{5}{27} = \frac{14 : 5}{1} = \frac{14}{5}$, d. h. der Quotient aus zwei Brüchen mit gleichen Nennern ist gleich dem Quotienten aus ihren Zählern.

$\frac{7}{15} : \frac{7}{8} = \frac{1}{15 : 8} = \frac{8}{15}$, d. h. der Quotient aus zwei Brüchen mit gleichen Zählern ist gleich dem reziproken Werte des Quotienten aus ihren Nennern.

6. Gemischte Zahlen werden zuvor in unechte Brüche verwandelt; z. B.

$$3\frac{11}{18} : 2\frac{11}{12} = \frac{\overset{13}{65}}{\underset{3}{18}} : \frac{\overset{7}{35}}{\underset{2}{12}} = \frac{13 \cdot 2}{3 \cdot 7} = \frac{26}{21} = 1\frac{5}{21};$$

$$15 : 6\frac{1}{4} = \frac{\overset{3}{15}}{1} : \frac{\overset{5}{25}}{4} = \frac{3 \cdot 4}{5} = \frac{12}{5} = 2\frac{2}{5}.$$

Zahlenausdrücke mit Brüchen.

§ 44.

Die Behandlungsweise von Zahlenausdrücken der ersten Art ist in § 39 erörtert.

Um einen Zahlenausdruck der zweiten Art zu berechnen, führt man gewöhnlich die Operationen nicht der Reihe nach in dem Zusammenhange, wie sie gegeben sind, aus, sondern verwandelt nach § 43. 3 jede Division durch einen Bruch zunächst in eine Multiplikation mit dem reziproken

Werte dieses Bruches, so dass schliesslich der ganze Ausdruck sich als ein Produkt aus Brüchen darstellt, welches nach § 42. 3 unter Vornahme von Vereinfachungen berechnet werden kann. Dabei ist jedoch genau zu beachten, wie oft durch einen vorkommenden Bruch dividiert werden soll; ist dies einmal der Fall, so wird der Bruch einfach umgestürzt; soll dann noch einmal durch denselben dividiert werden, so wird er abermals umgestürzt, er erscheint also wieder in seiner ursprünglichen Form. Wird dreimal durch einen Bruch dividiert, so wird er wieder umgestürzt u. s. f., z. B.

$$\begin{aligned} & \left[11\frac{11}{24} : \left(15\frac{1}{6} : \left(23\frac{1}{14} \cdot 3\frac{11}{29} \right) \right) \right] : 117 \\ & \frac{\left(140\frac{5}{9} : 39 \right) : \left(\left(3\frac{18}{85} \cdot 203 \right) : \left(2\frac{17}{20} : 10\frac{11}{15} \right) \right) : 294}{275 \cdot 6 \cdot 323 \cdot 98 \cdot 1 \cdot 9 \cdot 39 \cdot 273 \cdot 203 \cdot 20 \cdot 161 \cdot 1} \\ & \frac{24 \cdot 91 \cdot 14 \cdot 29 \cdot 117 \cdot 1265 \cdot 1 \cdot 85 \cdot 1 \cdot 57 \cdot 15 \cdot 294}{=} \\ & = (\text{nach gehöriger Vereinfachung}) \frac{7}{6} = 1\frac{1}{6}. \end{aligned}$$

Zahlenausdrücke gemischter Art endlich werden in derselben Weise behandelt wie solche mit ganzen Zahlen.

V. Dezimalbrüche.

Erklärung und Numerieren der Dezimalbrüche.

§ 45.

1. Dem dekadischen Zahlensystem zufolge geben immer zehn Einheiten einer niedrigeren Ordnung eine Einheit höherer Ordnung, so dass jede Ziffer einen zehnmal grösseren Wert erhält, wenn sie um eine Stelle nach links, dagegen einen zehnmal kleineren Wert, wenn sie um eine Stelle nach rechts gerückt wird. Setzt man daher die Ziffernreihe über die Einerstelle hinaus nach rechts fort, so kommen an die erste Stelle rechts nach den Einern Ziffern zu stehen, welche dem Werte nach zehnmal kleiner sind als die Einer, mithin nur Zehntel sind; die zweite Stelle nach den Einern wird dem Werte nach wieder zehnmal kleiner, sie enthält also Hundertstel, ebenso die dritte Stelle Tausendstel, die vierte Zehntausendstel, die fünfte Hunderttausendstel, die sechste Milliontel u. s. f.

Bezeichnet also in der Ziffernreihe 347825 die Zahl 7 die Einer, so hat man 3 Hunderter, 4 Zehner, 7 Einer, 8 Zehntel, 2 Hundertstel, 5 Tausendstel.

Dabei ist aber notwendig, dass die Stelle der Einer durch ein besonderes Zeichen kenntlich gemacht werde. Dieses Zeichen besteht in einem Komma, welches zwischen die Stellen der Einer und Zehntel gesetzt wird. Man schreibt 347,825.

Die Stellen links vom Komma sind Ganze; die Stellen rechts vom Komma aber sind gebrochene Einheiten und werden Dezimalstellen (Dezimalen) genannt. Es sind dies lauter Brüche, welche die Zahlen 10, 100, 1000 u. s. w., also lediglich die Zahl 10 oder eine Potenz von 10 zu Nennern haben, und sie heissen deshalb Dezimalbrüche.

Sind keine Ganzen vorhanden, in welchem Falle an deren Stelle, also links vor das Komma eine Null gesetzt wird, so ist der Dezimalbruch ein echter, z. B. 0,45 (0 Ganze, 4 Zehntel, 5 Hundertstel); sind aber Ganze vorhanden, so ist er ein unechter, z. B. 13,72 (13 Ganze, 7 Zehntel, 2 Hundertstel).

2. Der Erklärung der Dezimalbrüche zufolge ist

$$3,276 = 3 + \frac{2}{10} + \frac{7}{100} + \frac{6}{1000}, \text{ oder wenn man addiert}$$

$$= 3 + \frac{200 + 70 + 6}{1000} = 3\frac{276}{1000} = \frac{3276}{1000},$$

$$40,0308 = 40 + \frac{3}{100} + \frac{8}{10000}, \text{ oder wenn man addiert}$$

$$= 40 + \frac{300 + 8}{10000} = 40\frac{308}{10000} = \frac{400308}{10000}.$$

Statt demnach zu lesen: 3 Ganze, 2 Zehntel, 7 Hundertstel, 6 Tausendstel, kann man auch die Ganzen für sich lesen, dann sämtliche Dezimalstellen als den Zähler eines Bruches, dessen Nenner gleich dem Nenner der letzten Dezimalstelle ist, also die Zahl 1 mit so vielen angehängten Nullen, als Dezimalstellen vorhanden sind, nämlich:

3 Ganze, 276 Tausendstel; 40 Ganze, 308 Zehntausendstel.

Endlich kann man auch die Ganzen und Dezimalstellen als eine Zahl, und zwar als Zähler eines Bruches lesen, dessen Nenner ebenfalls durch die letzte Dezimalstelle bestimmt ist: 3276 Tausendstel; 400308 Zehntausendstel.

3. Bei dem Anschreiben eines Dezimalbruches hat man darauf zu achten, dass derselbe ebensoviele Dezimalstellen haben muss, als der Nenner Nullen hat. Die nach dem Komma fehlenden Stellen sind durch eingeschaltete Nullen zu ergänzen; z. B.

18 Ganze, 95 Hundertstel gibt angeschrieben: 18,95.

Ist aber der Dezimalbruch 36 Ganze, 743 Hunderttausendstel zu schreiben, so hat man, da der Nenner Hunderttausendstel 5 Stellen erfordert, der Zähler aber nur 3 Stellen hat, die nach dem Komma fehlenden 2 Stellen durch Nullen zu ersetzen, und erhält 36,00743.

509 Zehntausendstel ist zu schreiben: 0,0509; denn da der Dezimalbruch als echter keine Ganzen enthält, ist deren Stelle vor dem Komma durch Null zu ersetzen; da ferner der Nenner 10000 vier Nullen, der Zähler aber bloss 3 Stellen hat, ist nach dem Komma noch eine Null einzuschalten.

Um 60735 Tausendstel als Dezimalbruch anzuschreiben, beachte man, dass der Nenner bloss 3 Dezimalstellen erfordert, während der Zähler 5 Zifferstellen hat. In diesem Falle ist der Dezimalbruch ein unechter und man schneidet vom Zähler so viele Ziffern von rechts nach links als Dezimalen ab, als der Nenner Nullen hat, also: 60,735.

4. Jeder gemeine Bruch behält nach § 35 seinen Wert, wenn man Zähler und Nenner mit derselben Zahl multipliziert; es ist also:

$$\frac{45}{100} = \frac{450}{1000} = \frac{4500}{10000} = \text{u. s. f., also auch}$$

$$0,45 = 0,450 = 0,4500 \text{ u. s. f.}$$

d. h.: Ein Dezimalbruch bleibt seinem Werte nach unverändert, wenn man rechts beliebig viele Nullen anhängt oder weglässt.

Jede ganze Zahl lässt sich demnach auch als Dezimalbruch darstellen, wenn man nach der ganzen Zahl ein Komma setzt und beliebig viele Nullen als Dezimalstellen anhängt; z. B. $324 = 324,000$.

Addition und Subtraktion der Dezimalbrüche.

§ 46.

Die Addition und Subtraktion von Dezimalbrüchen wird genau wie die der ganzen Zahlen ausgeführt. Man beginnt bei der niedrigsten Ordnung, addiert oder subtrahiert die Einheiten gleicher Ordnung und setzt schliesslich das Komma zwischen die Stelle der Einer und Zehntel. Schreibt man die Dezimalbrüche untereinander, so kommt demnach genau Komma unter Komma zu stehen, und in der Summe oder Differenz erscheint das Komma an derselben Stelle.

Sind die gegebenen Dezimalbrüche nicht gleichnamig, d. h. haben sie nicht gleich viele Dezimalstellen, so kann man sie durch Anhängen von Nullen gleichnamig machen; z. B.

	4,352	25,0783	9,37508
+	39,05168	— 17,8927	— 8,294
+	0,98	7,1856	1,08108
+	502,4164		
+	47	147,02000	1
+	1250,07	— 93,51463	— 0,9265
+	0,2	53,50537	0,0735
	1844,07008		

Sind die Dezimalbrüche teils zu addieren, teils zu subtrahieren, so subtrahiert man von der Summe der positiven Glieder die Summe der negativen. (§ 12.)

Multiplikation der Dezimalbrüche.

§ 47.

1. Um Dezimalbrüche mit einander zu multiplizieren, schreibe man dieselben zunächst als gemeine Brüche an, und führe dann die Multiplikation aus, nämlich:

$$24,37 \cdot 1,2 = \frac{2437}{100} \cdot \frac{12}{10} = \frac{2437 \cdot 12}{100 \cdot 10} = \frac{29244}{1000} = 29,244;$$

$$0,363 \cdot 0,0015 = \frac{363}{1000} \cdot \frac{15}{10000} = \frac{5445}{10000000} = 0,0005445;$$

$$25 \cdot 0,07 = 25 \cdot \frac{7}{100} = \frac{175}{100} = 1,75.$$

Man erhält also als Produkt immer einen gemeinen Bruch, dessen Zähler das Produkt der beiden Dezimalbrüche ohne Komma, und dessen Nenner die Zahl 1 mit so vielen Nullen ist, als die gegebenen Dezimalbrüche zusammen Dezimalstellen haben. Demnach folgt:

Dezimalbrüche werden miteinander multipliziert, indem man die Multiplikation ohne Rücksicht auf das Komma wie bei ganzen Zahlen ausführt und im Produkte so viele Dezimalstellen von rechts nach links abschneidet, als die Faktoren zusammen Dezimalstellen haben.

2. Rückt man in einem Dezimalbruch das Komma um eine Stelle nach rechts, so erhält dadurch jede einzelne Stelle einen zehnmal grösseren Wert; denn aus den Einern werden Hunderter, aus den Hunderten werden Tausender, und ebenso aus den Zehnteln werden Einer, aus den Hundertsteln werden Zehntel u. s. f. Wenn aber jede einzelne Stelle zehnmal grösser geworden ist, so hat der Dezimalbruch selbst einen zehnmal grösseren Wert erhalten, d. h. er ist mit 10 multipliziert worden. In gleicher Weise wird jede einzelne Stelle, folglich der Dezimalbruch selbst, hundertmal grösser, wenn man das Komma um 2 Stellen nach rechts verrückt u. s. w.

Es wird demnach ein Dezimalbruch mit 10, 100, 1000 u. s. f. multipliziert, indem man einfach das Komma um 1, 2, 3 u. s. f. Stellen nach rechts rückt.

$$\begin{array}{ll} 7,409 \cdot 10 = 74,09 & 7,409 \cdot 1000 = 7409 \\ 100 \cdot 7,409 = 740,9 & 10000 \cdot 7,409 = 74090. \end{array}$$

Division der Dezimalbrüche.

§ 48.

1. Um zwei Dezimalbrüche durch einander zu dividieren, schreibe man dieselben zunächst wieder als gemeine Brüche an und führe dann die Division aus; z. B.

$$a) 3,6945 : 1,5 = \frac{36945}{10000} : \frac{15}{10} = \frac{36945 : 15}{10000 : 10} = \frac{2463}{1000} = \mathbf{2,463};$$

man beachte, dass der Dividend 4, der Divisor 1, und der Quotient 3, also $(4-1)$ Dezimalstellen hat.

$$b) 591,6 : 0,348 = \frac{5916}{10} : \frac{348}{1000} = \frac{5916}{1} : \frac{348}{100} = (5916 \cdot 100) :$$

$348 = (5916 : 348) \cdot 100 = 17 \cdot 100 = \mathbf{1700}$; der Dividend hat hier 1, der Divisor 3, also letzterer 2 Dezimalstellen mehr als der Dividend, der Quotient endlich ist mit 100 multipliziert, d. h. es sind ihm noch 2 Nullen angehängt worden.

$$c) 1,56 : 6,12 = \frac{156}{100} : \frac{12}{100} = 156 : 12 = \mathbf{13};$$

Dividend und Divisor haben hier gleichviel Dezimalstellen und der Quotient ist eine ganze Zahl.

Aus der Betrachtung dieser drei Fälle ergibt sich nun:

Dezimalbrüche werden durch einander dividiert, indem man die Division zunächst ohne Rücksicht auf das Komma, wie bei ganzen Zahlen ausführt, und sodann a) im Quotienten von rechts nach links so viele Dezimalstellen abschneidet, als der Dividend deren mehr hat wie der Divisor, oder b) dem Quotienten so viele Nullen anhängt, als der Dividend weniger Dezimalstellen hat wie der Divisor. Haben endlich c) Dividend und Divisor gleich viele Dezimalstellen, so enthält der Quotient Ganze.

2. Da durch das Verrücken des Komma um 1, 2, 3 u. s. f. Stellen nach links (umgekehrt wie im vorigen § nach rechts) jede einzelne Stelle eines Dezimalbruches, folglich der Dezimalbruch selbst, einen 10, 100, 1000mal u. s. w. kleineren Wert erhält, so folgt: Ein Dezimalbruch wird durch

10, 100, 1000 u. s. f. dividiert, indem man einfach das Komma um 1, 2, 3 u. s. f. Stellen nach links rückt.

$$\begin{aligned} 307,5 : 10 &= 30,75; & 307,5 : 1000 &= 0,3075; \\ 307,5 : 100 &= 3,075; & 307,5 : 10000 &= 0,03075. \end{aligned}$$

Ist der Divisor ein Vielfaches von 10, so dividiert man zuvor Dividend und Divisor durch 10, 100, 1000 u. s. f.; z. B.
 $7241,5 : 700 = 72,415 : 7 = 10,345.$

3. Lässt sich nicht sogleich erkennen, dass der Divisor im Dividenden ohne Rest enthalten ist, so multipliziert man Divisor und Dividend (wodurch ja der Wert des Quotienten nicht geändert wird) entsprechend mit 10, 100, 1000 u. s. f., so dass der Divisor als ganze Zahl erscheint. Alsdann dividiert man zunächst die Ganzen des Dividenden, wodurch man auch die Ganzen des Quotienten erhält. Nun setzt man das Komma und nimmt zu dem bleibenden Reste der Reihe nach die Zehntel, Hundertstel u. s. f. des Dividenden herunter, worauf man in gleicher Weise durch Division durch den Divisor die Zehntel, Hundertstel u. s. f. des Quotienten erhält. Geht die Division nicht auf, so hängt man dem Dividenden beliebig viele Nullen als Dezimalstellen an; z. B.

$$\begin{array}{rcl} 7,536 : 2,4 = & 0,00435 : 0,348 = & 1 : 1,25 = \\ \hline 75,36 : 24 = 3,14 & 4,35 : 348 = 0,0125 & 100 : 125 = 0,8 \\ \begin{array}{r} 3,3 \\ 96 \\ 0 \end{array} & \begin{array}{r} 4,3 \\ 4,35 \\ 870 \\ 1740 \\ 0 \end{array} & \begin{array}{r} 100,0 \\ 0 \end{array} \end{array}$$

4. Geht die Division nicht auf, soweit man dieselbe auch fortsetzen mag, so erhält der Quotient unendlich viel Dezimalstellen und heisst deshalb auch ein unendlicher Dezimalbruch. In diesem Falle bricht man die Division bei einer beliebigen Stelle ab und setzt nach derselben einige Punkte; z. B.

$$98 : 234 = 0,418803418 \dots$$

Wird ein solcher unendlicher Dezimalbruch mit einer bestimmten Anzahl Dezimalstellen in Rechnung gezogen, so erhöht man die letzte Stelle um eine Einheit, wenn die folgende Stelle 5 oder grösser als 5 ist. Sollen also von obigem Dezimalbruch drei Stellen verwendet werden, so rechnet man 0,419; sollen aber vier Stellen angenommen werden, so rechnet man 0,4188. Diese abgekürzten Dezimalbrüche sind ihrem Werte nach natürlich nicht mehr genau gleich dem ursprünglichen; doch wird man dem wahren Werte um so näher kommen, je mehr man Dezimalstellen in Rechnung zieht.

Verwandlung der gemeinen Brüche in Dezimalbrüche.

§ 49.

1. Soll ein gemeiner Bruch in einen Dezimalbruch verwandelt werden, so ist derselbe auf den Nenner 10, oder 100, oder 1000 u. s. f. zu erweitern. Da aber die Zahlen 10, 100, 1000 u. s. f. lediglich aus Faktoren 2 und 5 bestehen, so lassen sich auch nur solche Brüche in Dezimalbrüche von genau gleichem Werte verwandeln, deren Nenner bloss aus diesen Faktoren 2 oder 5 oder beiden bestehen; z. B.

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} &= \frac{1 \cdot 5}{2 \cdot 5} = \frac{5}{10} = 0,5; & \frac{3}{4} &= \frac{3 \cdot 25}{4 \cdot 25} = \frac{75}{100} = 0,75; \\ \frac{7}{8} &= \frac{7 \cdot 125}{8 \cdot 125} = \frac{875}{1000} = 0,875; & \frac{3}{40} &= \frac{3 \cdot 25}{40 \cdot 25} = \frac{75}{1000} = 0,075; \\ & & \frac{1}{125} &= \frac{1 \cdot 8}{125 \cdot 8} = \frac{8}{1000} = 0,008.\end{aligned}$$

2. Die Verwandlung in einen Dezimalbruch kann aber auch dadurch vorgenommen werden, dass man einfach durch den Nenner des gemeinen Bruches dessen Zähler dividiert, also die Division, welche in jedem gemeinen Bruche enthalten ist, wirklich ausführt; denn es ist z. B.

$$\begin{aligned}3\frac{5}{8} &= 3 + \frac{5}{8} = 3 + \frac{50}{80} : 8 = 3 + \left(\frac{48}{80} + \frac{2}{80}\right) : 8 \\ &= 3 + \frac{6}{10} + \frac{2}{80} : 8 = 3 + \frac{6}{10} + \frac{20}{1000} : 8 \\ &= 3 + \frac{6}{10} + \frac{2}{100} + \frac{4}{1000} : 8 \\ &= 3 + \frac{6}{10} + \frac{2}{100} + \frac{40}{10000} : 8 \\ &= 3 + \frac{6}{10} + \frac{2}{100} + \frac{5}{1000} = 3,625.\end{aligned}$$

3. Diese Division wird nun, so lange der Nenner nur die Faktoren 2 oder 5 oder beide enthält, immer aufgehen, und zwar wird man im Quotienten so viele Dezimalstellen erhalten, als der Exponent der im Nenner vorkommenden höchsten Potenz eines der beiden Faktoren 2 oder 5 Einheiten hat. Ist z. B. der Nenner $16 = 2^4$, so wird der Dezimalbruch 4 Stellen erhalten; ist der Nenner $800 = 2^5 \cdot 5^2$, so wird der Dezimalbruch 5 Dezimalstellen erhalten. Vorausgesetzt ist dabei, dass der gemeine Bruch auf seine einfachste Form gebracht ist, Zähler und Nenner also relative Primzahlen sind. Der erhaltene Dezimalbruch heisst in diesem Falle, da er nur eine bestimmte Anzahl von Dezimalstellen enthält, ein endlicher.

4. Enthält jedoch der Nenner des gemeinen Bruches keinen der Faktoren 2 und 5, oder ausser dem Faktor 2 oder 5 oder beiden auch noch andere Primfaktoren, so wird die Division des Zählers durch den Nenner nie aufgehen, soweit man dieselbe auch fortsetzen mag, der erhaltene Dezimalbruch wird also ein unendlicher werden.

Da aber bei der Division höchstens nur so viele verschiedene Reste vorkommen können, als der um 1 verminderte Nenner des gemeinen Bruches Einheiten hat, so müssen sich bei diesen unendlichen Dezimalbrüchen irgend einmal die Dezimalstellen in derselben Aufeinanderfolge wiederholen. Diese immer wiederkehrende Reihe von Dezimalstellen nennt man Periode, den Dezimalbruch selbst periodisch.

5. Beginnt die Periode sogleich nach dem Komma, so heisst der Dezimalbruch rein periodisch, und es ist dies immer der Fall, wenn der Nenner des gemeinen Bruches keinen der Faktoren 2 oder 5 enthält. Die Periode kennzeichnet man gewöhnlich dadurch, dass man entweder auf die erste und letzte Ziffer derselben einen Punkt setzt, oder die erste Periode überstreicht; z. B.

$$\frac{1}{3} = 0,\dot{3}33 \dots \text{(Periode 3)}$$

$$63\frac{5}{7} = 63,\overline{714285}714285 \dots \text{(Periode 714285)}$$

$$\frac{8}{99} = 0,\overline{080808} \dots \text{(Periode 08)}.$$

6. Stehen zwischen dem Komma und der Periode noch andere sich nicht wiederholende Dezimalstellen, was sich ergibt, wenn der Nenner des gemeinen Bruches ausser anderen Primfaktoren auch einen der Faktoren 2 oder 5 oder auch beide enthält, so heisst der Dezimalbruch unrein periodisch.

Als Ziffern, welche, zwischen dem Komma und der Periode stehend, sich nicht wiederholen (Vorziffern), wird man so viele erhalten, als der Exponent der im Nenner vorkommenden höchsten Potenz von 2 oder 5 Einheiten hat; z. B.

Ist der Nenner des gemeinen Bruches $28 = 2^2 \cdot 7$, so beträgt die Anzahl der Vorziffern 2, während die Periode höchstens $(7 - 1)$ Ziffern, also 6 Ziffern enthält.

Ist der Nenner $2200 = 2^3 \cdot 5^2 \cdot 11$, so beträgt die Anzahl der Vorziffern 3, während die Periode höchstens 10 Ziffern, allerdings auch weniger enthalten kann.

$$\frac{25}{28} = 0,89\overline{285714}285 \dots \text{(Vorziffern 89, Periode 285714);}$$

$$7\frac{63}{2200} = 7,028\overline{6363} \dots \text{(Vorziffern 028, Periode 63).}$$

Verwandlung der Dezimalbrüche in gemeine Brüche.

§ 50.

1. Den gemeinen Bruch, aus welchem ein endlicher Dezimalbruch entstanden ist, erhält man wieder, wenn man diesen als gemeinen Bruch anschreibt und sodann auf seine einfachste Form bringt; z. B.

$$0,875 = \frac{875}{1000} = \frac{7}{8}; 41,0096 = 41\frac{96}{10000} = 41\frac{6}{625}.$$

2. Um einen rein periodischen Dezimalbruch, z. B. 0,027027 . . . in einen gemeinen Bruch zu verwandeln, verfährt man auf folgende Weise. Man nimmt von dem gegebenen Dezimalbruche das 10, 100, 1000, . . . fache, so dass das Komma nach der Periode zu stehen kommt; dann folgt:

Das 1000 fache des Dezbrch. ist 27,027 . . . ,

das 1 fache „ „ „ 0,027 . . . , subtr. gibt:

das 999 fache „ „ „ 27 (Die Dezimalstellen fallen als gleich weg)

das 1 fache „ „ „ $\frac{27}{999} = \frac{3}{111} = \frac{1}{37}$;

also ist $0,027027 \dots = \frac{1}{37}$.

Oder bezeichnet man mit x den gemeinen Bruch, welchem z. B. der Dezimalbruch 0,857142857 . . . gleich ist, so erhält man:

1 000000 x = 857142,857142 . . . , davon subtrahiert

1 x = 0,857142 . . . , gibt

999999 x = 857142, folglich

$$0,857142857 \dots = x = \frac{857142}{999999} = \frac{857142}{10101} = \frac{8658}{3367} = \frac{2886}{3367} = \frac{481}{3367} = \frac{6}{7}.$$

Hieraus ergibt sich:

Ein rein periodischer Dezimalbruch ist gleich einem gemeinen Bruche, dessen Zähler von der Periode und dessen Nenner von so vielen Neunern gebildet wird als die Periode Zifferstellen hat,

3. Ist der Dezimalbruch ein unrein periodischer,

z. B. 0,84459459 . . . , so hat man

das 100000 fache ist 84459,459... (Komma nach d. Periode)

das 100 fache ist 84,459... (Komma vor d. Periode)

folglich das 99900 fache ist 84375 (also 84459 — 84) und

das 1 fache ist $\frac{84375}{99900}$, so dass

$$0,84459459 \dots = \frac{84459 - 84}{99900} = \frac{84375}{99900} = \frac{225}{277} = \frac{3}{148}.$$

Oder sei $x = 0,9074074 \dots$ in dem unechten Dezimalbruche $15,9074074 \dots$, so ist

$$10000 x = 9074,074 \dots, \text{ davon subtrahiert}$$

$$10 x = 9,074 \dots, \text{ gibt}$$

$$9990 x = 9065 (= 9074 - 9), \text{ folglich}$$

$$x = \frac{9065}{9990}; \text{ also ist}$$

$$15,9074074 \dots = 15 \frac{9074 - 9}{9990} = 15 \frac{9065}{9990} = 15 \frac{5}{1998} = 15 \frac{37}{54}.$$

Hieraus ergibt sich:

Jeder unrein periodische Dezimalbruch ist gleich einem gemeinen Bruche, dessen Zähler die Differenz zweier Zahlen ist; der Minuend enthält die Vorziffern zusamt der Periode, der Subtrahend aber die Vorziffern allein. Der Nenner dagegen besteht aus so vielen Neunern als die Periode Zifferstellen hat, und aus so vielen angehängten Nullen als der Periode Vorziffern vorangehen.

VI. Benannte Brüche.

Reduktion und Anwendung von Zahlenausdrücken.

§ 51.

a) Bruchteile von Einheiten höherer Ordnung werden durch Multiplikation der Reduktionszahl mit denselben in Einheiten niederer Ordnung, sowie in mehrfach benannte Zahlen verwandelt; z. B.

$$14 \frac{1}{20} \mathcal{M} = 14 \mathcal{M} + 100 \mathfrak{A} \cdot \frac{1}{20} = 14 \mathcal{M} 5 \mathfrak{A}.$$

$$4 \frac{11}{16} \mathcal{L} = 4 \mathcal{L} 13 \text{ sh } 9 \text{ d.}$$

$$\frac{11}{16} \mathfrak{z} = 20 \text{ sh} \cdot \frac{11}{16} = \frac{55}{4} \text{ sh} = 13 \frac{3}{4} \text{ sh}; \frac{3}{4} \text{ sh} = 12 \text{ d} \cdot \frac{3}{4} = 9 \text{ d.}$$

$$3,3475^{\text{d}} = 3^{\text{d}} 8^{\text{h}} 20' 24''.$$

$$0,3475^{\text{d}} = 24^{\text{h}} \cdot 0,3475 = 8,34^{\text{h}} = 8^{\text{h}} + 0,34^{\text{h}}$$

$$0,34^{\text{h}} = 60' \cdot 0,34 = 20,4' = 20' + 0,4';$$

$$0,4' = 60'' \cdot 0,4 = 24''.$$

$$50,3679 \text{ £} = 10 \text{ £} 7 \text{ sh} 4 \text{ d (ungefähr)}$$

$$6,3679 \text{ £} = 20 \text{ sh} . 0,3679 = 7,358 \text{ sh}; 0,358 \text{ sh} = 12 \text{ d} . 0,358 = 4,296 \text{ d}.$$

b) Sollen mehrfach benannte Zahlen in einfach benannte Zahlen, deren Einheiten von höherer Ordnung sind, verwandelt werden, so hat man durch die Reduktionszahl zu dividieren; z. B.:

$$43 \text{ Ztr} 25 \text{ ¤} = 43 \text{ Ztr} + \frac{25}{100} \text{ Ztr} = 43\frac{1}{4} \text{ Ztr}.$$

$$6^{\text{d}} 4^{\text{h}} 53' 20'' = 6\frac{11^{\text{d}}}{54}.$$

$$20'' = \left(\frac{20}{60}\right)' = \frac{1'}{3}; 53\frac{1'}{3} = \left(\frac{160}{3} : 60\right)^{\text{h}} = \frac{8^{\text{h}}}{9}; 4\frac{8^{\text{h}}}{9} = \left(\frac{44}{9} : 24\right)^{\text{d}} = \frac{11^{\text{d}}}{54}.$$

$$5 \text{ £} 15 \text{ sh} 9 \text{ d} = 5,7875 \text{ £}.$$

$$9 \text{ d} = \frac{9}{12} \text{ sh} = 0,75 \text{ sh}; 15,75 \text{ sh} = \frac{15,75}{20} \text{ £} = 0,7875 \text{ £}.$$

$$6^{\text{d}} 4^{\text{h}} 53' 20'' = 6,2037037 \dots^{\text{d}}.$$

$$20'' = \left(\frac{20}{60}\right)' = 0,333 \dots'; 53,333 \dots' = \frac{53,333 \dots^{\text{h}}}{60} = 0,888 \dots^{\text{h}}.$$

$$4,888 \dots^{\text{h}} = \frac{4,888 \dots^{\text{d}}}{24} = 0,2037037 \dots^{\text{d}}$$

Beispiele.

1. Es kauft jemand 50 kg einer Ware, nämlich 26 kg 250 g à 1 kg für 3 M 20 ¤, den Rest zu 3 M 10 ¤ pro kg. Die Unkosten betragen $2\frac{7}{8}$ M. Nachdem beim Transporte 1 kg 950 g zu Verlust gegangen sind, verkauft er die Ware im ganzen und gewinnt 22 M 9 ¤. Wie teuer hat er 1 kg verkauft?

Lösung: 26 kg 250 g = $26\frac{1}{4}$ kg à 3,2 M	kosten	. . .	84	M
Rest (50 — $26\frac{1}{4}$) kg = $23\frac{3}{4}$ kg à 3,1 M.	„	. . .	73,625	M.
				Einkauf . . . 157,625 M
				Unkosten . . . 2,875 M.
				Gewinn . . . 22,09 M
				Verkauf . . . 182,59 M.

Da 1 kg 950 g zu Verlust gegangen sind, so werden verkauft: (50 — 1,95) kg = 48,05 kg für 182,59 M, folglich

$$1 \text{ kg für } 182,59 \text{ M} : 48,05 = 3,8 \text{ M} = 3 \text{ M } 80 \text{ ¤}.$$

2. Es soll jemand 1000 Stücke einer Ware, das Stück zu 3 M $37\frac{1}{2}$ ¤ liefern. 160 Stücke lässt er anfertigen, das Stück zu 3 M 75 ¤, den Rest zu einem solchen Preis, dass er im ganzen 255 M gewinnt; was hat er für ein Stück des Restes bezahlt?

$$\text{Lösung: } 3 \text{ M } 37\frac{1}{2} \text{ ¤} = 3\frac{3}{8} \text{ M}; 3 \text{ M } 75 \text{ ¤} = 3\frac{3}{4} \text{ M}.$$

Da 1000 Stück à $3\frac{3}{8}$ M geliefert werden sollen, so erhält der Lieferant im ganzen $3\frac{3}{8}$ M . 1000; will er nun bei dem Geschäfte 225 M gewinnen, so wird er selbst für Anfertigung der 1000 St. bezahlen müssen $\left(3\frac{3}{8} \cdot 1000 - 225\right)$ M. Da er aber für Anfertigung von 160 Stück à $3\frac{3}{4}$ M im ganzen $3\frac{3}{4}$ M . 160 bezahlt, so wird er für den noch anzufertigenden Rest von $(1000 - 160)$ Stücken die übrig bleibende Summe von $\left(\left(3\frac{3}{8} \cdot 1000 - 225\right) - 3\frac{3}{4} \cdot 160\right)$ M zu zahlen haben, folglich für 1 Stück des Restes den $(1000 - 160)$. Teil dieser Summe. Er hat somit für 1 Stück des Restes bezahlt:

$$\left[\left(3\frac{3}{8} \cdot 1000 - 225\right) - 3\frac{3}{4} \cdot 160\right] : (1000 - 160) = 3 \text{ M.}$$

3. Aus einem Wasserbehälter, der 1054 l Wasser fasst und bis zur Hälfte gefüllt ist, fließen durch eine Röhre in je 7 Minuten 51 l aus. Durch eine andere Röhre fließen in denselben Behälter alle $\frac{1}{2}$ Stunden $352\frac{1}{2}$ l hinzu. Wenn nun letztere Röhre 11 Mt. später geöffnet wird als erstere, nach welcher Zeit wird der Behälter angefüllt sein?

Lösung: Der Behälter enthält bei Oeffnung der Abflussröhre, da er zur Hälfte gefüllt ist, $\frac{1054}{2}$ l Wasser. Durch die Abflussröhre fließen in 7' 51 l aus, folglich in 1' $\frac{51}{7}$ l und in den 11', während welcher diese Röhre allein offen ist, $\frac{51}{7}$ l . 11, so dass bei Oeffnung der Zuflussröhre in dem Behälter noch enthalten sind $\left(\frac{1054}{2} - \frac{51}{7} \cdot 11\right)$ l Wasser. Da der Behälter aber 1054 l fasst, so sind jetzt zu füllen.

$$\left[1054 - \left(\frac{1054}{2} - \frac{51}{7} \cdot 11\right)\right] \text{ l Wasser.}$$

Durch die Zuflussröhre fließen in $\frac{1}{2}$ h $352\frac{1}{2}$ l hinzu, folglich in 1' $\frac{352\frac{1}{2}}{30}$ l Wasser; durch die Abflussröhre fließen in 1' $\frac{51}{7}$ l aus. Soll nun der Behälter voll werden, so muss mehr Wasser hinein fließen als heraus, es muss $\frac{352\frac{1}{2}}{30} > \frac{51}{7}$ sein, und zwar wird in 1' so viel Wasser in den Behälter kommen, als mehr hineinfließt wie heraus, nämlich

$$\left(\frac{352\frac{1}{2}}{30} - \frac{51}{7}\right) \text{ l.}$$

Wenn aber so viele l überhaupt in je 1' in den Behälter kommen, so sind, um die $\left[1054 - \left(\frac{1054}{2} - \frac{51}{7} \cdot 11\right)\right]$ l anzufüllen, so viele Minuten nötig, als die Anzahl l, welche in je 1' hineinfließen, in der im ganzen anzufüllenden Anzahl l enthalten ist, also

$$\left\{\left[1054 - \left(\frac{1054}{2} - \frac{51}{7} \cdot 11\right)\right] : \left(\frac{352\frac{1}{2}}{30} - \frac{51}{7}\right)\right\} \text{ Mt.} = 136 \text{ Mt.} = 2^h 16'$$

Der Behälter wird also in $2^h 16'$ nach Oeffnung der Zuflussröhre, oder $136' + 11' = 147' = 2^h 27'$ nach Oeffnung der Abflussröhre voll sein.

Einfache Massreduktionen, insbesondere Umwandlungen der alten Einheiten in die neuen.

§ 52.

Zur Umwandlung gegebener Einheiten in andere von derselben Art ist vor allem die Kenntniss der im § 22 angegebenen Beziehungen zwischen den verschiedenen gleichartigen Einheiten notwendig. Dazu dienen weiter noch folgende Beziehungen des metrischen Mass- und Gewichtsystemes zu dem früheren bayerischen:

1' bayer. = 0,29186 m.	1 m = 3,426' bayer.
1 Elle = 0,833 m.	1 m = 1,2 Ellen.
1 Wegstunde = 3,707 km.	1 km = 0,2697 Wegstunde.
1 geogr. Meile = 7,419 km.	1 km = 0,135 geogr. Meilen.
1 □' = 0,085182 qm.	1 qm = 11,7396 □'.
1 Tagwerk = 34,073 a.	1 ha = 2,9349 Tagwerk.
1 Kub' = 0,024861 cbm.	1 cbm = 40,2235 Kub'.
1 Klafter = 3,1325 cbm (st)	1 ster = 0,3192 Klafter.
1 Mass = 1,069 l.	1 l = 0,9354 Mass.
1 Metze = 37,0596 l.	1 hl = 0,449726 Schäffel.
1 ℔ bayer. = 560 g.	1 kg = 1,7857 ℔ bayer.
1 Lot = 17,5 g.	1 kg = 2 Zoll-℔.

Die Umwandlung der Einheiten wird nach folgenden Beispielen vorgenommen:

1. Wieviel Mark geben 9 fl. 48 kr.?

$$9 \text{ fl. } 48 \text{ kr.} = 9\frac{4}{5} \text{ fl.}; 7 \text{ fl.} = 12 \text{ M}, \text{ folglich } 1 \text{ fl.} = \frac{12}{7} \text{ M}, \text{ und}$$

$$9\frac{4}{5} \text{ fl.} = \frac{12}{7} \text{ M} \cdot 9\frac{4}{5} = \frac{12}{7} \text{ M} \cdot \frac{49}{5} = \frac{84}{5} \text{ M} = 16,8 \text{ M} = 16 \text{ M } 80 \text{ dl.}$$

2. Wieviel frs. geben 201 M 20 ℔?

Es sind 4 M = 5 frs, folglich 1 M = $\frac{4}{5}$ frs, und

$$201,2 \text{ M} = \frac{5}{4} \text{ frs} \cdot 201,2 = 5 \text{ frs} \cdot 50,3 = 251,5 \text{ frs} = 215 \text{ frs } 50 \text{ cs.}$$

3. Wieviel m geben $16' 1'' 8'''$ (ddm)?

$16' 1'' 8''' = 16\frac{5'}{36} = 16,1388 \dots$; nun ist $1 \text{ m} = 0,29186 \text{ m}$,
folglich $16,139' = 0,292 \text{ m}$. $16,139 = 4,712588 \dots \text{ m}$.

Oder: $3,426' = 1 \text{ m}$; so oft also $3,426'$ vorhanden sind, d. h. so oft $3,426'$ in $16,139'$ enthalten sind, so oft mal hat man 1 m ; demnach sind $16,139' = (16,139 : 3,426) \text{ m} = 4,7107 \dots \text{ m}$.

Da nur eine bestimmte Anzahl Dezimalstellen in Rechnung gezogen wurde, so sind die beiden Resultate nur annähernd genau und stimmen deshalb auch nicht in allen Dezimalstellen zusammen. Man wird in dem gegebenen Falle $4,71 \text{ m}$ als hinreichend genau annehmen können.

4. Von 2 Personen verkaufte A früher 2 Ztr 48 $\mathfrak{L}$ 12 Lot bayer. für 122 fl. 31 kr., B dagegen verkauft jetzt 2 Ztr 48 $\mathfrak{L}$ $187\frac{1}{2} \text{ g}$ neues Gewicht für 178 $\mathcal{M}$ 83 $\mathfrak{S}$. Wessen Ware ist billiger und um wieviel $\mathfrak{S}$ pro Kilogramm?

Lösung: 2 Ztr. 48 $\mathfrak{L}$ 12 Lot $= 248\frac{3}{8} \mathfrak{L} = 560 \text{ g}$. $248\frac{3}{8} = 139090 \text{ g} = 139,09 \text{ kg}$.

$122 \text{ fl. } 31 \text{ kr.} = \frac{12}{7} \mathcal{M}$. $122\frac{31}{60} = \frac{12}{7} \mathcal{M}$. $\frac{7351}{60} = \frac{14702}{70} \mathcal{M} = 210,03 \mathcal{M}$.

A verkaufte $139,09 \text{ kg}$ für $210,03 \mathcal{M}$, folglich 1 kg für $210,03 \mathcal{M} : 139,09 = 1,51 \mathcal{M}$.

$2 \text{ Ztr } 48 \mathfrak{L} 187\frac{1}{2} \text{ g} = 100 \text{ kg} + 24 \text{ kg} + 0,1875 \text{ kg} = 124,1875 \text{ kg}$.

B verkauft $124,1875 \text{ kg}$ für $178,83 \mathcal{M}$, folglich 1 kg für $178,83 \mathcal{M} : 124,1875 \mathcal{M} = 1,44 \mathcal{M}$.

Da nun $1,51 \mathcal{M} - 1,44 \mathcal{M} = 0,07 \mathcal{M} = 7 \mathfrak{S}$, so verkauft B das kg um $7 \mathfrak{S}$ billiger als A.

Verlag von Max Kellerer's h. b. Hofbuchhandlung in München.

- Bronner, F. J., Parallelismus der Flusssysteme Europas, Asiens, Afrikas und Amerikas.** Vergleichung der wichtigsten Ströme dieser Erdteile. *M* 1.—
- Disziplinarsatzungen für Schüler der Studienanstalten des Königr. Bayern.** *M* —.10
- Disziplinarsatzungen für Schüler der Realschulen des Königr. Bayern** *M* —.10
- Fuchs, M. J., Kgl. Professor. Die wichtigsten Thatsachen der Chemie der Carbonide.** Eine Grundlage für Unterrichtszwecke der deutschen Mittelschulen. 2. Aufl. geb. *M* 2.20.
- Gärtner, Fr., Friedr. Güll.** Ein Bild seines Lebens und Wirkens. *M* 1.—
- Gebele, Jos., Peter v. Osterwald.** Ein Beitrag zur Geschichte der Aufklärung in Bayern unter Kurfürst Max III. *M* 1.50
- Kniess, K., Kgl. Gymnasialprofessor, Lehrbuch der Arithmetik für Real- und Lateinschulen.** I. Teil. 6. Aufl. *M* 1.—
II. Teil. 4. Aufl. *M* 1.50
- Kniess, K., Kgl. Gymnasialprofessor & Bachmann, O., Kgl. Mathematiklehrer, Aufgabensammlung für das Rechnen mit bestimmten Zahlen.** I. Teil. 6. Aufl. *M* 1.20
II. Teil. 6. Aufl. *M* 1.90
Resultate I/II. Teil á *M* 1.—
— Für Lateinschulen bearbeitet in 1 Teil. 6. Aufl. *M* 1.60
- Knilling, Rud., Einführung in die stilist. Entwicklungstheorie.** *M* —.80
- Krallinger, Dr., Kgl. Professor, Synchronistisch-genealogisch-kultur-histor. Tabelle zur bayer. Geschichte seit Otto von Wittelsbach, in 6 Farben gedruckt.** *M* —.20
- Lautenhammer, Dr. J., Kgl. Professor. Lehrbuch der engl. Sprache.** Theoretisch-praktischer Lehrgang.
I. Teil. Aussprache. 2. Aufl. *M* 1.50
II. Teil. Formenlehre. *M* 1.80
III. Teil. Syntax. *M* 1.80
— Übungsbuch zum Übersetzen aus dem Deutschen ins Englische. *M* 1.20
— Stenographisches Lese- und Übungsbuch. 3 Teile. á *M* —.40
- Materialien für den Unterricht in der Geographie nach der zeichnenden Methode,** herausgegeben vom Bezirkslehrerverein München. 24 Skizzen und 24 Sätze á Satz 3 fl. , á Skizze 10 fl.
- Pernat, F. S., Schreiblehrer, Vorlagen zum Schönschreibunterricht, systematisch geordnet.** I. deutsche Schrift. 21. Aufl. *M* —.30
II. latein. „ 8. Aufl. *M* —.30
III. griech. „ 14. Aufl. *M* —.35
- Rohmeder, Dr., Rektor und städt. Schulrat und Wenz, G., Reallehrer. Wandkarte von Südbayern.** 2. Aufl. *M* 10.—
aufgezogen *M* 13.—
- Rohmeder, A. E., Die Abkürzung der Wörter.** *M* —.50.
- Schiessl, Max, Die stilist. Entwicklungstheorie.** 2. Aufl. *M* 2.80
- Spöttel, A., Zur Sprachreinigung.** 2. Aufl. *M* —.60
- Wenz, G., Atlas zur Landkartenentwurfslehre.** *M* 2.80

Lehrbuch der Arithmetik für Real- und Lateinschulen

Bd.: 1

1898

Math.p. 257 fddg-1

urn:nbn:de:bvb:12-bsb11867848-1